

§ 2.2 整式の加法・減法・乗法

整式と整式とを足すことを整式の加法といい、整式から整式を引くことを整式の減法といいます。整式の加法・減法の計算では、分配法則から導かれる次の等式が基になります：自然数 n 及び文字 x が現れない式 A, B に対して、

$$Ax^n \pm Bx^n = (A \pm B)x^n \quad (\text{複号同順}) \quad .$$

例 x の整式 A と B とを $A = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6$, $B = ax^2 - 4x - 2$ とおきます。 $A + B$ と $A - B$ と $B - A$ とを x の整式として降幂の順に整理します。

$$A + B = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 + ax^2 - 4x - 2 = 2x^3 - 4ax^2 + (3a - 4)x + 4 \quad .$$

$$A - B = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 - (ax^2 - 4x - 2) = 2x^3 - 6ax^2 + (3a + 4)x + 8 \quad .$$

$$B - A = ax^2 - 4x - 2 - (2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6) = -2x^3 + 6ax^2 - (3a + 4)x - 8 \quad . \quad \text{終}$$

問題 2.2.1 x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$, $B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおきます。 $A + B$ と $A - B$ と $B - A$ とを x の整式として降幂の順に整理しなさい。

整式と整式との積はやはり整式になります。

まず単項式の乗法から始めます。自然数 m, n 及び文字 x が現れない式 A, B に対して、 x の単項式 Ax^m と Bx^n との積はやはり x の単項式になります：指数法則 $x^m x^n = x^{m+n}$ を用いると、

$$Ax^m \times Bx^n = ABx^m x^n = ABx^{m+n} \quad .$$

整式と整式とを掛けることを整式の乗法といいます。多くの場合、整式の乗法の計算では単項式の和の形に整理します。このことを整式の展開といいます。展開には分配法則 (1.1 節の法則 1.1.9) が重要になります。

例 x の 1 次式 $2x + 5$ と $3x - 4$ との積を展開して整理します。分配法則を用います。

$$\begin{aligned} (2x + 5)(3x - 4) &= 2x(3x - 4) + 5(3x - 4) \\ &= 2x \cdot 3x - 2x \cdot 4 + 5 \cdot 3x - 5 \cdot 4 = 6x^2 - 8x + 15x - 20 \\ &= 6x^2 + 7x - 20 \quad . \end{aligned} \quad \text{終}$$

例解 x の 1 次式 $2x - 5$ と 2 次式 $3x^2 - x - 7$ との積を展開して整理します。

$$\begin{aligned} (2x - 5)(3x^2 - x - 7) &= 2x(3x^2 - x - 7) - 5(3x^2 - x - 7) \\ &= 2x \cdot 3x^2 - 2x \cdot x - 2x \cdot 7 - 5 \cdot 3x^2 - 5 \cdot (-x) - 5 \cdot (-7) \\ &= 6x^3 - 2x^2 - 14x - 15x^2 + 5x + 35 \\ &= 6x^3 - 17x^2 - 9x + 35 \quad . \end{aligned}$$

この展開を次のように計算することもあります。

$$\begin{array}{rcl} & 3x^2 & -x & -7 \\ \times & 2x & -5 & \\ \hline 6x^3 & -2x^2 & -14x & \\ & -15x^2 & +5x & +35 \\ \hline 6x^3 & -17x^2 & -9x & +35 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times 2x \\ \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times (-5) \\ \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times 2x + (3x^2 - x - 7) \times (-5) \end{array} \quad \text{終}$$

原則として、展開した結果は降幂の順（或いは昇幂の順）に整理します。

例題 y の整式 $(2y - k)(y^2 - 3y + 2k)$ を展開して降幂の順に整理する。

$$\begin{aligned} (2y - k)(y^2 - 3y + 2k) &= 2y(y^2 - 3y + 2k) - k(y^2 - 3y + 2k) \\ &= 2y^3 - 6y^2 + 4ky - ky^2 + 3ky - 2k^2 \\ &= 2y^3 - (k + 6)y^2 + 7ky - 2k^2 \quad . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 2.2.2 以下の整式を展開して x の整式として降幂の順に整理しなさい。

(1) $\left(3x + \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6x + 3)$. (2) $(3x - 2k)(x^2 + 2kx - 3)$.

整式の展開に 1.3 節の乗法公式を使うこともあります：任意の数 a, b, c, d, x について、

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (\text{複号同順}) \quad , \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \quad , \\ (x + a)(x + b) &= x^2 + (a + b)x + ab \quad , \\ (ax + b)(cx + d) &= acx^2 + (ad + bc)x + bd \quad , \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad (\text{複号同順}) \quad , \\ (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) &= a^3 \pm b^3 \quad (\text{複号同順}) \quad . \end{aligned}$$

例題 x の整式 $(2x - 3)(x - 2k + 1)$ を展開して降幂の順に整理する。

乗法公式 $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ を用いる。

$$\begin{aligned} (2x - 3)(x - 2k + 1) &= (2x - 3)\{x + (-2k + 1)\} \\ &= 2x^2 + \{2(-2k + 1) - 3\}x - 3(-2k + 1) \\ &= 2x^2 + (-4k - 1)x + 6k - 3 \\ &= 2x^2 - (4k + 1)x + 6k - 3 \quad . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 2.2.3 x の整式 $(ax + 2)(3x - 4a)$ を展開して降幂の順に整理しなさい。

例題 y の整式 $\left(y + \frac{2}{3}\right)^3$ を展開して降幂の順に整理する。

乗法公式 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を用いる。

$$\left(y + \frac{2}{3}\right)^3 = y^3 + 3y^2 \frac{2}{3} + 3y \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} \quad . \quad \text{終}$$

問題 2.2.4 y の整式 $\left(y - \frac{4}{3}\right)^3$ を展開して降幂の順に整理しなさい。

一般に、自然数 m と n とについて、

$$m \text{ 次式と } n \text{ 次式との積は } (m + n) \text{ 次式}$$

になります。