§2.1 整式

ある特定の文字，例えば x に着目するとき，自然数 n に対して，x が現れない式 A と x の n 乗 x^n との積の形で表される式 Ax^n を，x（について）の n 次の単項式あるいは n 次の項といいます． この単項式 Ax^n において，自然数 n を**次数** (degree) といい，x が現れない部分 A を**係数** (coefficient) といいます． 例えば次のようになります：

$$-\frac{7x^4}{3} \text{ は } x \text{ の4次の単項式で係数は } -\frac{7}{3} \text{ です；}$$
$$(2+\sqrt{5})y \text{ は } y \text{ の1次の単項式で係数は } 2+\sqrt{5} \text{ です；}$$
$$(a^2-4)t^3 \text{ は } t \text{ の3次の単項式で係数は } a^2-4 \text{ です.}$$

1.2節で定めたように，任意の数 x に対して $x^0=1$ でした． 従って，着目する文字 x が現れない式 A について， $A=Ax^0$ ですから，A は x の0次の単項式と考えます． つまり，

着目する文字 x が現れない式は x の0次の単項式

と考えます． 但し，定数0は，x の単項式ですが，その次数は考えません．

例えば，文字 x と y とが現われる式 $\frac{4}{5}x^2y^3$ は，x の単項式と考えると次数は2で，y の単項式と考えると次数は3です． このように，複数の文字が現れる式は，単項式であっても着目する文字によって次数が異なることがあります．

x の単項式，及び，いくつかの x の単項式の和の形の式を，x（について）の**多項式**といいます． 多項式を構成する各々の単項式をその多項式の**項** (term) といいます． 多項式の項の中で次数が最大の項の次数をその多項式の**次数**といいます．

$\boxed{\text{例}}$ 式 $(4-\sqrt{7})x+(3a-7)x^2-\frac{2}{5}x^3-a^2-6$ は x の多項式で次のようになります：

$$\underbrace{(4-\sqrt{7})x}_{1\text{次の項}}+\underbrace{(3a-7)x^2}_{2\text{次の項}}+\Big(\underbrace{-\frac{2}{5}x^3}_{3\text{次の項}}\Big)+\big(\underbrace{-a^2-6}_{0\text{次の項}}\big) .$$

この多項式 $(4-\sqrt{7})x+(3a-7)x^2-\frac{2}{5}x^3-a^2-6$ での次数は3です． $\boxed{\text{終}}$

整理すると x（について）の多項式になる式を，x（について）の**整式**といいます[1]． 例えば x の式 $x^2(x-5)$ は， $x^2(x-5)=x^3-5x^2$ というように多項式になるので，整式です． 整式の次数とはできるだけ簡単な多項式に整理したときの多項式の次数です． 自然数 n に対して，次数が n の整式を n 次式といいます．

文字 x が現れない式 A と B 及び自然数 n について，

$$Ax^n+Bx^n=(A+B)x^n .$$

このようにして多項式において次数が同じ複数の項を一つの項にまとめることができます． 多項式の中の着目する文字 x が現れない総ての項を定数項といいます． 定数項 A は $A=Ax^0$ なので次数は0です．

整式について，次数の高い項ほど先に現れる多項式に整理することを降冪の順に整理するといいます． 例えば，x の3次式を降冪の順に整理すると次の形になります：

$$\underbrace{Ax^3}_{3\text{次の項}} + \underbrace{Bx^2}_{2\text{次の項}} + \underbrace{Cx}_{1\text{次の項}} + \underbrace{D}_{\text{定数項}} \qquad (\text{但し } A,B,C,D \text{ は } x \text{ が現れない式}),$$
$$\xrightarrow{\text{項の次数が下降していく}}$$

ここで2次の項 Bx^2，1次の項 Cx，定数項 D は無いこともあります． また，整式について，次数の低い項ほど先に現れる多項式に整理することを昇冪の順に整理するといいます． 例えば，x の3次式を昇冪の順に整理すると次の形になります：

$$\underbrace{A}_{\text{定数項}} + \underbrace{Bx}_{1\text{次の項}} + \underbrace{Cx^2}_{2\text{次の項}} + \underbrace{Dx^3}_{3\text{次の項}} \qquad (\text{但し } A,B,C,D \text{ は } x \text{ が現れない式}),$$
$$\xrightarrow{\text{項の次数が上昇していく}}$$

ここで定数項 A，1次の項 Bx，2次の項 Cx^2 は無いこともあります．

多くの場合整式は降冪の順に整理します．

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2$ を，降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2 &= \Big(2-\frac{5}{2}\Big)x^2+(4-\sqrt{3})x+6\\ &= -\frac{1}{2}x^2+(4-\sqrt{3})x+6 ,\end{aligned}$$

昇冪の順に整理すると

$$4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2 = 6+(4-\sqrt{3})x-\frac{1}{2}x^2 .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.1.1}}$ x の整式 $-5x+\frac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-(4x^2-\sqrt{7}x)$ を降冪の順及び昇冪の順に整理しなさい．

複数の文字が現れる整式は，着目する文字によって，整式の次数や整理した結果が異なることがあります．

$\boxed{\text{例}}$ 式 $2x(x^2+4kx-3)-k(x^2-5x-6k)$ について，x の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}2x(x^2+4kx-3)-k(x^2-5x-6k) &= 2x^3+8kx^2-6x-kx^2+5kx+6k^2\\ &= 2x^3+7kx^2+(5k-6)x+6k^2 ;\end{aligned}$$

これは x の3次の多項式である． 式 $2x(x^2-4kx-3)+k(x^2+5x-6k)$ について，k の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}2x(x^2+4kx-3)-k(x^2-5x-6k) &= 2x^3+8kx^2-6x-kx^2+5kx+6k^2\\ &= 6k^2+(7x^2+5x)k+2x^3-6x ;\end{aligned}$$

これは k の2次式である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.1.2}}$ 式 $2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p)$ を，x の整式として降冪の順に整理しなさい；更に，p の整式として降冪の順に整理しなさい．

定数 a,b,c に対して x の整式 ax^2+bx+c を考えます． この整式 ax^2+bx+c は普通に考えると x の2次式です． ところが， $a\neq 0$ と断わられていない限り，$a=0$ かもしれません． $a=0$ のときを考慮すると，x の整式 ax^2+bx+c の次数は2以下ということになります． このように，整式の次数が2以下であるとき，次数が高々2次であるといいます． 一般に，自然数 n に対して，整式の次数が n 以下であるとき，その整式は高々 n 次であるといいます．

複数の文字，例えば x と y とに着目して，x も y も現れない式 A と x の冪 x^m（m は自然数）と y の冪 y^n（n は自然数）との積で表される式 Ax^my^n を x と y と（について）の単項式といいます． x^my^n は x と y との両方併せて $(m+n)$ 個の積ですから，単項式 Ax^my^n の次数は $m+n$ とします． 単項式 Ax^my^n おいて x と y とが現れない式の部分 A を係数といいます． また，x と y との単項式または x と y との単項式の和の形の式を x と y と（について）の多項式といい，x と y との多項式に整理できる式を x と y との整式といいます．

---

[1] 実際には多項式と整式とはあまり区別されません．