

§ 11.7 グループに分ける分け方の総数

例解 5人の人を3人のA班と2人のB班とに分けるときにあり得る班分けの総数を求めます。5人の中からA班の3人を選ぶと、B班は残りの2人に決まってしまう。つまり、5人をA班の3人とB班の2人とに分けることは、5人の中からA班に属す3人を選ぶことと同等です。従って、5人をA班の3人とB班の2人とに分けるときにあり得る班分けの総数は、5人の中からA班の3人を選ぶときにあり得る場合の総数ですから、

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10. \quad \text{終}$$

例題 6人のグループが旅館の2人部屋と4人部屋とに別れて宿泊する。この6人を2人部屋と4人部屋とに振り分けるときあり得る振り分けの総数を求める。

【解説】6人の中から2人部屋に泊まる2人を決めれば、それ以外の4人が4人部屋に泊まることになる。従って、6人を2人部屋と4人部屋とに振り分けるときあり得る振り分けの総数は、6人の中から2人部屋に泊まる2人を選ぶときにあり得る場合の総数なので、

$${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15. \quad \text{終}$$

問題 11.7.1 7人の人達で会場の設営と撤去とを行います。この7人を、設営を行うグループの4人と撤去を行うグループの3人とに振り分ける（両方のグループに属す人はいない）ときにあり得る振り分けの総数を求めなさい。

例解 白い基石が5個、黒い基石が2個あります。これらを一列に並べるときにあり得る配置の総数を求めます。白い基石どうしは区別できず、黒い基石どうしも区別できないものとします。合計7個の基石を一列に並べるので、例えば下図のように、列の1番目から7番目までの7箇所に基石を置くことになります。



このように、白い基石5個と黒い基石2個とを一列に並べることは、基石を置く7箇所を白い基石を置く5箇所と黒い基石を置く2箇所とに分けることです。従って、白い基石5個と黒い基石2個とを一列に並べるときにあり得る配置の総数は、7箇所を5箇所のグループと2箇所のグループとに分けるときにあり得る場合の総数ですから、

$${}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21. \quad \text{終}$$

例題 記号‘○’と‘×’とだけから成る列で、‘○’が5回‘×’が3回現れるようなものの総数を求める。

【解説】‘○’が5回‘×’が3回現れる列を作ることは、例えば下図のように、1番目から8番目までの8箇所を‘○’を置く5箇所と‘×’を置く3箇所とに分けることである。



従って、記号‘○’と‘×’とだけから成る列で‘○’が5回‘×’が3回現れるようなものの総数は、1番目から8番目までの8箇所を‘○’を置く5箇所と‘×’を置く3箇所とに分けるときの場合の総数なので、 ${}_8C_3 = 56$ 。

問題 11.7.2 数字‘0’と‘1’とだけから成る列で、‘0’が5回‘1’が4回現れるようなものの総数を求めなさい。

問題 11.7.3 記号‘△’と‘▽’とだけから成る列で、‘△’が6回‘▽’が4回現れるようなものの総数を求めなさい。

例解 7人の人を2人のA班と3人のB班と2人のC班とに分けるときの場合の総数を求めます。7人の中からA班の2人を選び出すときの場合の総数は ${}_7C_2$ です。A班の2人をどのように選び出しても、その残りの5人の中からB班の3人を選び出すときの場合の総数は ${}_5C_3$ です。従って、積の法則より、7人の中からA班の2人を選び出して残りの5人の中からB班の3人を選び出すときの場合の総数は ${}_7C_2 \times {}_5C_3$ です。A班の2人とB班の3人とを選び出すと、C班は残りの2人に決まってしまう。故に、7人の人を2人のA班と3人のB班と2人のC班とに分けるときの場合の総数は

$${}_7C_2 \times {}_5C_3 = {}_7C_2 {}_5C_2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 210.$$

7人の中から、先にB班の3人を選び出し、次にC班の2人を選び出し、残りの2人をA班にする、というように考えて計算しても結果は同じです：

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 210. \quad \text{終}$$

例題 ある人が他のもう1人の人と9回ジャンケンをする。9回のジャンケンの勝敗だけを考えると、結果が4勝3敗2引き分けになる場合の総数を求める。

【解説】9回のジャンケンの結果が4勝3敗2引き分けになる場合の総数は、1回めから9回めまでの9回のジャンケンを引き分けの2回と負けの3回と勝ちの4回とに分ける分け方の総数、つまり9個のものを2個のグループと3個のグループと4個のグループとに分けるときの場合の総数なので、

$${}_9C_2 \times {}_7C_3 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 18 \cdot 70 = 1260. \quad \text{終}$$

問題 11.7.4 10人の学生に課題を与えます。課題はAとBとCとの3種類があり、各学生にこの内の一つの課題を割り当てます。課題Aを割り当てる学生を4人、課題Bを割り当てる学生を3人、課題Cを割り当てる学生を3人とするとき、学生に課題を割り当てるときの場合の総数を求めなさい。

先に述べたように、自然数 n, p について $p \leq n$ のとき、全体で n 個のものをグループAに属す p 個のものとグループBに属す $(n-p)$ 個のものとの分け方の総数は ${}_nC_p$ です。但し、このことが成り立つのは、グループに分けたときの各グループが区別されるときです。

例題 異なる6冊の本を2つの箱に3冊ずつに分けて入れる。以下の各々の条件の下で、どう分けるかについて場合の総数を求める。

(1) 2つの箱を区別できるとき。

(2) 2つの箱を区別できないとき。

【解説】2つの箱の一方にAと書いた札を付け、他方にBと書いた札を付ける。異なる6冊の本をAの札の箱に入れる3冊とBの札の箱に入れる3冊とに分けることは、6冊の本をAのグループに入れる3冊とBのグループに入れる3冊とに分けることである。その分け方の総数は ${}_6C_3$ である。

異なる6冊の本を a, b, c, d, e, f とおく。6冊の本をAの札の箱とBの札の箱とに3冊ずつに分けて入れたあと、両方の札を外すと箱の区別はできないとする。このとき、例えば、

a, b, c を札Aの箱に入れて d, e, f を札Bの箱に入れた状態と、

a, b, c を札Bの箱に入れて d, e, f を札Aの箱に入れた状態と

は、両方の札を外すと区別できなくなる。このように、箱に札がついていたとき区別できた2つの状態が、箱から札を外すと区別できなくなる。従って、箱から札を外して2つの箱を区別できないとき、6冊の本を3冊ずつ2つの箱に分けるときの場合の総数は $\frac{{}_6C_3}{2}$ である。

(1) 2つの箱を区別するとき、あり得る場合の総数は

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

(2) 2つの箱を区別しないとき、あり得る場合の総数は

$$\frac{{}_6C_3}{2} = \frac{20}{2} = 10. \quad \text{終}$$

問題 11.7.5 8人の学生が4人ずつ2つの班に分かれて実験をします。以下の各々の条件の下で、実験の班分けについてあり得る場合の総数を求めなさい。

(1) 2つの班が異なる実験をするとき。

(2) 2つの班が同じ実験をするとき。

いくつかのものを区別がつくグループに分けるときにあり得る場合の総数は次のようになります。自然数 a, b に対して、全部で $(a+b)$ 個のものをグループAに属す a 個とグループBに属す b 個とに分ける分け方の総数は

$${}_{a+b}C_a = \frac{(a+b)!}{a!b!}.$$

自然数 a, b, c に対して、全部で $(a+b+c)$ 個のものをグループAに属す a 個とグループBに属す b 個とグループCに属す c 個とに分ける分け方の総数は、 $(a+b+c)$ 個のものをグループAに属す a 個とグループBまたはCに属す $(b+c)$ 個とに分ける分け方の総数が ${}_{a+b+c}C_a$ で、それぞれの分け方に対して、グループBまたはCに属す $(b+c)$ 個のものをグループBに属す b 個とグループCに属す c 個とに分ける分け方の総数が ${}_{b+c}C_b$ なので、積の法則より、

$${}_{a+b+c}C_a \times {}_{b+c}C_b = \frac{(a+b+c)!}{a!(b+c)!} \cdot \frac{(b+c)!}{b!c!} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}.$$