

§ 11.0 階乗

正の自然数 n に対して、 n の階乗とは次の式で表される自然数のことです：

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n .$$

正の自然数 n の階乗を $n!$ と書き表します：

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n .$$

次のようになります：

$$1! = 1 ,$$

$$2! = 1 \times 2 = 2 ,$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 ,$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 ,$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 ,$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 ,$$

\vdots .

このことは次のようにも表せます。

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \xrightarrow{\times 2} & 1 \times 2 & \xrightarrow{\times 3} & 1 \times 2 \times 3 & \xrightarrow{\times 4} & 1 \times 2 \times 3 \times 4 & \xrightarrow{\times 5} & 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 & \xrightarrow{\times 6} & \cdots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \cdots \\ 1! & & 2! & & 3! & & 4! & & 5! & & \cdots \end{array}$$

0 も自然数ですから、0 の階乗 $0!$ を定義します。 $0! = x$ を上の図に組み込むと次のようになるはずですが、

$$\begin{array}{cccccccc} x & \xrightarrow{\times 1} & 1 & \xrightarrow{\times 2} & 1 \times 2 & \xrightarrow{\times 3} & 1 \times 2 \times 3 & \xrightarrow{\times 4} & 1 \times 2 \times 3 \times 4 & \xrightarrow{\times 5} & 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 & \xrightarrow{\times 6} & \cdots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \cdots \\ 0! & & 1! & & 2! & & 3! & & 4! & & 5! & & \cdots \end{array}$$

この図より $x \times 1 = 1$ となるはずですが、よって $0! = x = 1$ となるはずですが。このことから、0 の階乗 $0!$ の値は 1 であると約束します：

$$0! = 1 .$$