

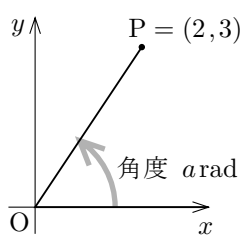
第10章の補遺4 逆正接関数の利用

**例題**  $xy$  座標平面における点  $P = (2, 3)$  に対して、原点  $O$  を極として  $x$  軸の向きに伸びる始線  $Ox$  に対する線分  $OP$  の弧度法による角度を  $a\text{rad}$  ( $a$  は実数) とおく.

$-\pi < a \leq \pi$  とする. 逆正接関数を用いて  $a$  の値を表す.

$$\tan a = \frac{3}{2} \quad \text{なので} \quad \tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\frac{3}{2}.$$

点  $P$  の  $x$  座標が正なので、 $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ , よって  $\tan^{-1}(\tan a) = a$ . 故に  $a = \tan^{-1}\frac{3}{2}$ . 終



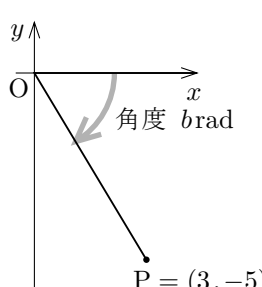
**例題**  $xy$  座標平面における点  $P = (3, -5)$  に対して、原点  $O$  を極として  $x$  軸の向きに伸びる始線  $Ox$  に対する線分  $OP$  の弧度法による角度を  $b\text{rad}$  ( $b$  は実数) とおく.

$-\pi < b \leq \pi$  とする. 逆正接関数を用いて  $b$  の値を表す.

$$\tan b = -\frac{5}{3} \quad \text{なので}$$

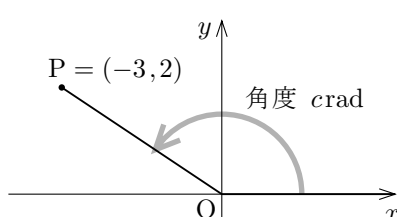
$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{5}{3},$$

点  $P$  の  $x$  座標が正なので、 $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$ , よって  $\tan^{-1}(\tan b) = b$ . 故に  $b = -\tan^{-1}\frac{5}{3}$ . 終



**問題 10.補遺4.1**  $xy$  座標平面における点  $P = (5, -7)$  に対して、原点  $O$  を極として  $x$  軸の向きに伸びる始線  $Ox$  に対する線分  $OP$  の弧度法による角度を  $a\text{rad}$  ( $a$  は実数) とおきます.  $-\pi < a \leq \pi$  とします. 逆正接関数を用いて  $a$  の値を表しなさい.

**例題**  $xy$  座標平面における点  $P = (-3, 2)$  に対して、原点  $O$  を極として  $x$  軸の向きに伸びる始線  $Ox$  に対する線分  $OP$  の弧度法による角度を  $c\text{rad}$  ( $c$  は実数) とおく.  $-\pi < c \leq \pi$  とする. 逆正接関数を用いて  $c$  の値を表す.



【注意】 逆正接関数  $\tan^{-1}x$  の基本周期は  $\pi$  なので  $\tan c = \tan(c - \pi)$ .

【解答】  $\tan c = -\frac{2}{3}$  なので

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3}.$$

$\frac{\pi}{2} < c < \frac{3\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} < c - \pi < \frac{\pi}{2}$ , よって

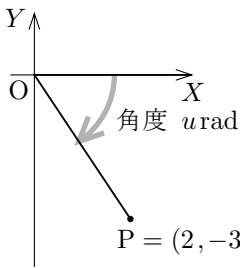
$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\{\tan(c - \pi)\} = c - \pi.$$

従って  $c - \pi = -\tan^{-1}\frac{2}{3}$  なので、 $c = \pi - \tan^{-1}\frac{2}{3}$ . 終

**問題 10.補遺4.2**  $xy$  座標平面における点  $P = (-4, 3)$  に対して、原点  $O$  を極として  $x$  軸の向きに伸びる始線  $Ox$  に対する線分  $OP$  の弧度法による角度を  $b\text{rad}$  ( $b$  は実数) とおきます.  $-\pi < b \leq \pi$  とします. 逆正接関数を用いて  $b$  の値を表しなさい.

**例題** 次のような実数  $r, s$  の組を一つ求める: 任意の実数  $x$  について  $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x + s)$ .

【解説】  $XY$  座標平面における点  $P = (2, -3)$  に対して、原点  $O$  を極として  $X$  軸の向きに伸びる始線  $OX$  に対する線分  $OP$  の弧度法による角度を  $u\text{rad}$  ( $u$  は実数) とおく.  $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$  としてよい. 定理 10.9.5 より、任意の実数  $x$  について



$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \sin(x + u) \\ &= \sqrt{13} \sin(x + u). \end{aligned}$$

$\tan u = -\frac{3}{2}$  なので、

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2}.$$

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$  なので  $\tan^{-1}(\tan u) = u$ . よって  $u = -\tan^{-1}\frac{3}{2}$ . 任意の実数  $x$  について

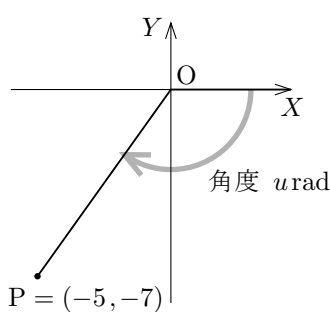
$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13} \sin\left(x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right).$$

$r = \sqrt{13}$  かつ  $s = -\tan^{-1}\frac{3}{2}$  とすればよい. 終

**問題 10.補遺4.3** 次のような実数  $r, s$  の組を一つ求めなさい: 任意の実数  $x$  について  $4\sin x - 3\cos x = r\sin(x + s)$ .

**例題** 次のような実数  $r, s$  の組を一つ求める: 任意の実数  $x$  について  $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x + s)$ .

$XY$  座標平面における点  $P = (-5, -7)$  に対して、原点  $O$  を極として  $X$  軸の向きに伸びる始線  $OX$  に対する線分  $OP$  の弧度法による角度を  $u\text{rad}$  ( $u$  は実数) とおく.  $-\frac{3\pi}{2} < u < -\frac{\pi}{2}$  としてよい. 定理 10.9.5 より、任意の実数  $x$  について



$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} \sin(x + u) \\ &= \sqrt{74} \sin(x + u). \end{aligned}$$

$\tan u = \frac{7}{5}$  なので、 $\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\frac{7}{5}$ .  $-\frac{3\pi}{2} < u < -\frac{\pi}{2}$  より  $-\frac{\pi}{2} < u + \pi < \frac{\pi}{2}$  なので

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u + \pi)\} = u + \pi.$$

よって  $u + \pi = \tan^{-1}\frac{7}{5}$  なので、 $u = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi$ . 任意の実数  $x$  について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{74} \sin\left(x + \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi\right).$$

$r = \sqrt{74}$  かつ  $s = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi$  とすればよい. 終

**問題 10.補遺4.4** 次のような実数  $r, s$  の組を一つ求めなさい: 任意の実数  $x$  について  $-7\sin x - 4\cos x = r\sin(x + s)$ .