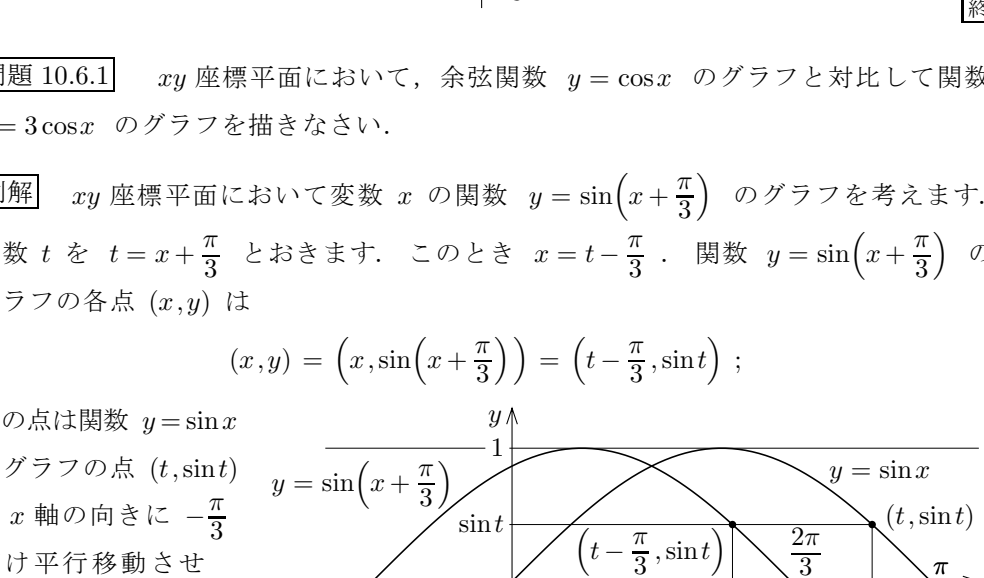
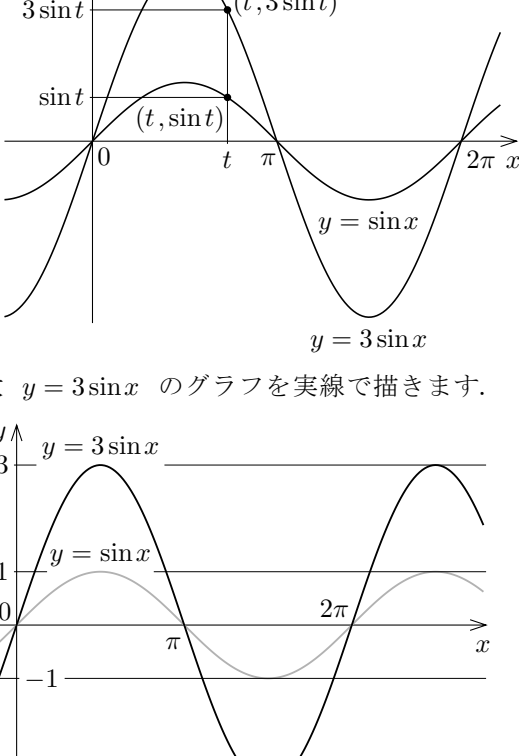


§10.6 正弦関数・余弦関数を含む合成関数のグラフ

1次関数と三角関数との合成関数のグラフを考えます。

例解 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = 3\sin x$ のグラフを考えます。各実数 t に対して、関数 $y = 3\sin x$ のグラフの点 $(t, 3\sin t)$ は関数 $y = \sin x$ のグラフの点 $(t, \sin t)$ の y 座標だけを3倍にした点です。よって、 $y = 3\sin x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフの各点の y 座標だけを3倍した点の全体です。関数 $y = \sin x$ のグラフを網掛けの線で、関数 $y = 3\sin x$ のグラフを実線で描きます。



問題 10.6.1 xy 座標平面において、余弦関数 $y = \cos x$ のグラフと対比して関数 $y = 3\cos x$ のグラフを描きなさい。

例解 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフを考えます。変数 t を $t = x + \frac{\pi}{3}$ とおきます。このとき $x = t - \frac{\pi}{3}$ 。関数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフの各点 (x, y) は

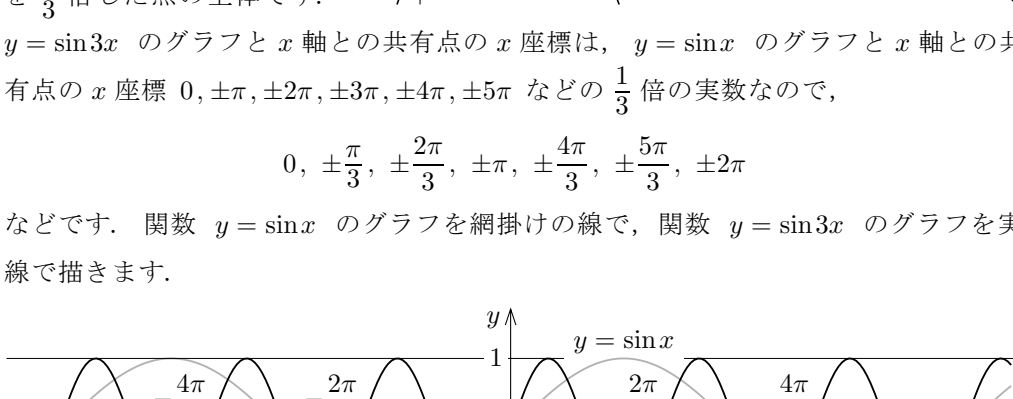
$$(x, y) = (x, \sin(x + \frac{\pi}{3})) = (t - \frac{\pi}{3}, \sin t);$$

この点は関数 $y = \sin x$ のグラフの点 $(t, \sin t)$ を x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた点です。よって、

$y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた曲線です。 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、 $y = \sin x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標 $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ などに $-\frac{\pi}{3}$ を加えた実数なので、

$$-\frac{\pi}{3}, \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, -2\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$$

などです。関数 $y = \sin x$ のグラフを網掛けの線で、関数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフを実線で描きます。



問題 10.6.2 xy 座標平面において、余弦関数 $y = \cos x$ のグラフと対比して関数 $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフを描きなさい。

例解 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \sin 3x$ のグラフを考えます。変数 t を $t = 3x$ とおきます。このとき $x = \frac{t}{3}$ 。関数 $y = \sin 3x$ のグラフの各点 (x, y) は

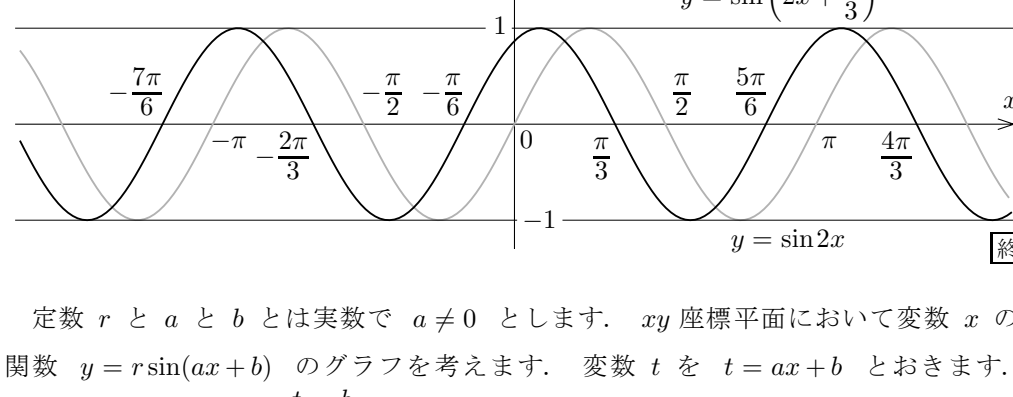
$$(x, y) = (x, \sin 3x) = (\frac{t}{3}, \sin t);$$

この点は関数 $y = \sin x$ のグラフの点 $(t, \sin t)$ の x 座標だけを $\frac{1}{3}$ 倍にした点です。よって、

$y = \sin 3x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフの各点の x 座標だけを $\frac{1}{3}$ 倍にした点の全体です。 $y = \sin 3x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、 $y = \sin x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標 $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm 5\pi$ などの $\frac{1}{3}$ 倍の実数なので、

$$0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\pi, \pm\frac{4\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}, \pm 2\pi$$

などです。関数 $y = \sin x$ のグラフを網掛けの線で、関数 $y = \sin 3x$ のグラフを実線で描きます。



関数 $\sin 3x$ の基本周期は $\frac{2\pi}{3}$ です；これは $y = \sin 3x$ のグラフの波一つ分の長さです。

このように、0でない定数 a に対して、関数 $y = \sin(ax)$ のグラフは関数 $y = \sin x$ のグラフの各点の x 座標だけを $\frac{1}{a}$ 倍にした点の全体です。

問題 10.6.3 xy 座標平面において、余弦関数 $y = \cos x$ のグラフと対比して関数 $y = \cos 3x$ のグラフを描きなさい。

例解 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ のグラフを考えます。変数 t を $t = 2x + \frac{\pi}{3}$ とおきます。このとき $x = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}$ 。関数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ のグラフの各点 (x, y) は

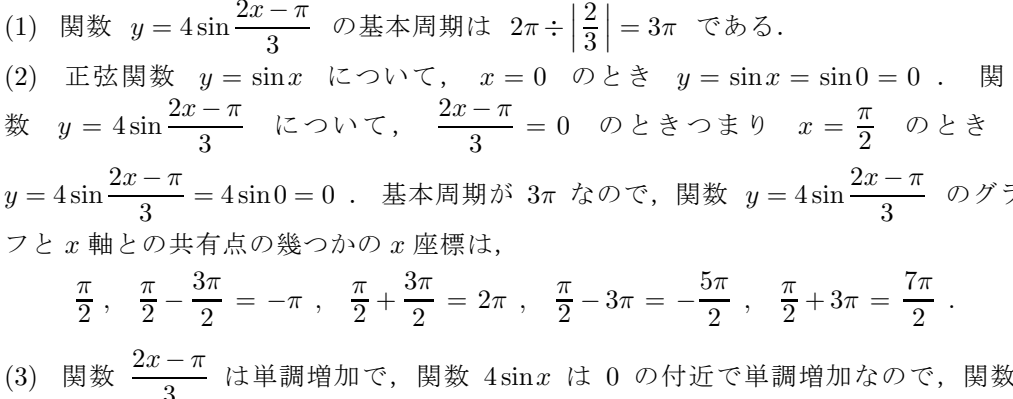
$$(x, y) = (x, \sin(2x + \frac{\pi}{3})) = (\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}, \sin t);$$

この点は関数 $y = \sin x$ のグラフの点 $(t, \sin t)$ の x 座標だけを $\frac{1}{2}$ 倍して $-\frac{\pi}{6}$ を加えた点です。従って、 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ のグラフは、 $y = \sin x$ のグラフの各点について x 座標だけを $\frac{1}{2}$ 倍して $-\frac{\pi}{6}$ だけ x 軸の向きに平行移動させた曲線です。

$y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、 $y = \sin x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標 $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ などを $\frac{1}{2}$ 倍して $-\frac{\pi}{6}$ を加えた実数

$$\frac{0}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \frac{-2\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$$

などです。これらの実数の間隔は基本周期 π の $\frac{1}{2}$ 倍の $\frac{\pi}{2}$ です。関数 $y = \sin 2x$ のグラフを網掛けの線で、関数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ のグラフを実線で描きます。



定数 r と a と b とは実数で $a \neq 0$ とします。 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = r\sin(ax+b)$ のグラフを考えます。変数 t を $t = ax+b$ とおきます。 $ax = t - b$ なので $x = \frac{t}{a} - \frac{b}{a}$ 。関数 $y = r\sin(ax+b)$ のグラフの各点 (x, y) は

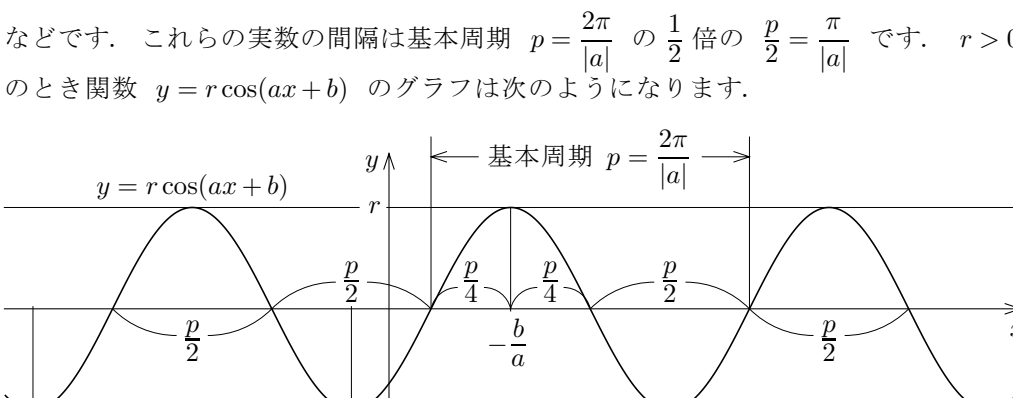
$$(x, y) = (x, r\sin(ax+b)) = (\frac{t}{a} - \frac{b}{a}, r\sin t);$$

この点は関数 $y = r\sin x$ のグラフの点 $(t, r\sin t)$ の x 座標だけを $\frac{1}{a}$ 倍して $-\frac{b}{a}$ を加えた点です。従って、 $y = r\sin(ax+b)$ のグラフは、 $y = r\sin x$ のグラフで各点の x 座標だけを $\frac{1}{a}$ 倍した曲線を x 軸の向きに $-\frac{b}{a}$ だけ平行移動させた曲線です。

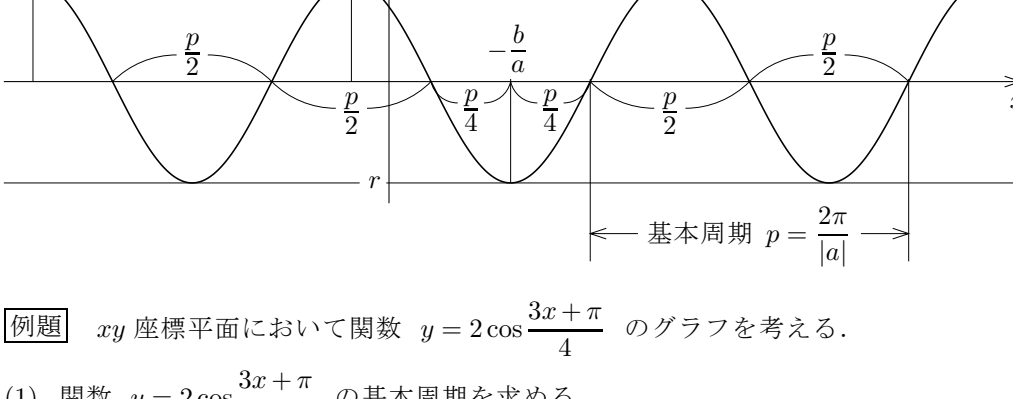
$y = r\sin(ax+b)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、 $y = \sin x$ のグラフと x 軸との共有点の座標 $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ などを $\frac{1}{a}$ 倍して $-\frac{b}{a}$ を加えた実数

$$\frac{0}{a} - \frac{b}{a} = -\frac{b}{a}, \frac{\pm\pi}{a} - \frac{b}{a} = \frac{\pm\pi - b}{a}, \frac{\pm 2\pi}{a} - \frac{b}{a} = \frac{\pm 2\pi - b}{a}, \frac{\pm 3\pi}{a} - \frac{b}{a} = \frac{\pm 3\pi - b}{a}$$

などです。これらの実数の間隔は基本周期 $p = \frac{2\pi}{|a|}$ の $\frac{1}{2}$ 倍の $\frac{p}{2} = \frac{\pi}{|a|}$ です。 $ar > 0$ のとき、関数 $y = r\sin(ax+b)$ は $-\frac{b}{a}$ の付近で単調増加であり、そのグラフは次のようになります。



$ar < 0$ のとき、関数 $y = r\sin(ax+b)$ は $-\frac{b}{a}$ の付近で単調減少であり、そのグラフは次のようになります。



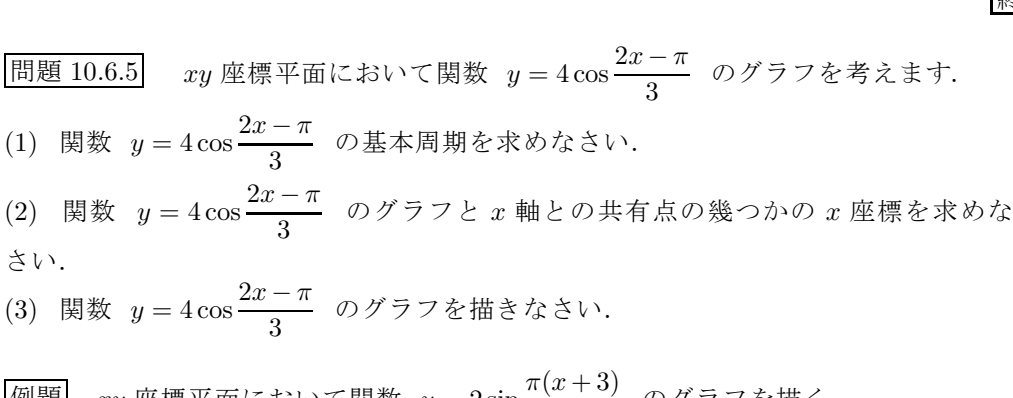
例題 xy 座標平面において関数 $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフを考える。

- 関数 $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ の基本周期を求めよ。
- 関数 $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めよ。
- 関数 $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフを描く。

【解説】
 (1) 関数 $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ の基本周期は $2\pi \div \frac{2}{3} = 3\pi$ である。
 (2) 正弦関数 $y = \sin x$ について、 $x = 0$ のとき $y = \sin x = \sin 0 = 0$ 。関数 $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ について、 $\frac{2x-\pi}{3} = 0$ のときつまり $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3} = 4\sin 0 = 0$ 。基本周期が 3π なので、関数 $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は、

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi, \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi, \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$$

(3) 関数 $\frac{2x-\pi}{3}$ は単調増加で、関数 $4\sin x$ は 0 の付近で単調増加なので、関数 $4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ は $\frac{\pi}{2}$ の付近で単調増加である。関数 $y = 4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフは次のようになる。



問題 10.6.4 xy 座標平面において関数 $y = 2\sin\frac{4x+2\pi}{3}$ のグラフを考えます。

- 関数 $y = 2\sin\frac{4x+2\pi}{3}$ の基本周期を求めなさい。
- 関数 $y = 2\sin\frac{4x+2\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めなさい。
- 関数 $y = 2\sin\frac{4x+2\pi}{3}$ のグラフを描きなさい。

定数 r と a と b とは実数で $a \neq 0$ とします。 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = r\cos(ax+b)$ のグラフを考えます。変数 t を $t = ax+b$ とおきます。 $ax = t - b$ なので $x = \frac{t}{a} - \frac{b}{a}$ 。関数 $y = r\cos(ax+b)$ のグラフの各点 (x, y) は

$$(x, y) = (x, r\cos(ax+b)) = (\frac{t}{a} - \frac{b}{a}, r\cos t);$$

これは関数 $y = r\cos x$ のグラフの点 $(t, r\cos t)$ の x 座標だけを $\frac{1}{a}$ 倍して $-\frac{b}{a}$ を加えた点です。従って、 $y = r\cos(ax+b)$ のグラフは、 $y = r\cos x$ のグラフで各点の x 座標だけを $\frac{1}{a}$ 倍した曲線を x 軸の向きに $-\frac{b}{a}$ だけ平行移動させた曲線です。

$y = r\cos(ax+b)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、 $y = \cos x$ のグラフと x 軸との共有点の座標 $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$ などを $\frac{1}{a}$ 倍して $-\frac{b}{a}$ を加えた実数

$$\pm\frac{\pi}{2} - \frac{b}{a} = \frac{\pm\pi - b}{2a}, \pm\frac{3\pi}{2} - \frac{b}{a} = \frac{\pm 3\pi - b}{2a}, \pm\frac{5\pi}{2} - \frac{b}{a} = \frac{\pm 5\pi - b}{2a}$$

などです。これらの実数の間隔は基本周期 $p = \frac{2\pi}{|a|}$ の $\frac{1}{2}$ 倍の $\frac{p}{2} = \frac{\pi}{|a|}$ です。 $r > 0$ のとき関数 $y = r\cos(ax+b)$ のグラフは次のようになります。

$r < 0$ のとき関数 $y = r\cos(ax+b)$ のグラフは次のようになります。

例題 xy 座標平面において関数 $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフを考える。

- 関数 $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ の基本周期を求めよ。
- 関数 $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めよ。
- 関数 $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフを描く。

【解説】
 (1) 関数 $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ の基本周期は $2\pi \div \frac{3}{4} = \frac{8\pi}{3}$ である。
 (2) 余弦関数 $y = \cos x$ について、 $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $y = \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ 。関数 $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ について、 $\frac{3x+\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のときつまり $x = \frac{\pi}{3}$ のとき $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$ 。基本周期が $\frac{8\pi}{3}$ なので、関数 $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は、

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = -\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} = 3\pi$$

(3) 関数 $\frac{3x+\pi}{4}$ は単調増加で、関数 $2\cos x$ は 0 の付近で単調減少なので、関数 $2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ は $\frac{\pi}{3}$ の付近で単調減少である。関数 $y = 2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフは次のようになる。

問題 10.6.5 xy 座標平面において関数 $y = 4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフを考えます。

- 関数 $y = 4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ の基本周期を求めなさい。
- 関数 $y = 4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めなさい。
- 関数 $y = 4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフを描きなさい。

例題 xy 座標平面において関数 $y = 2\sin\frac{\pi(x+3)}{4}$ のグラフを描く。

【解説】 関数 $y = 2\sin\frac{\pi(x+3)}{4}$ の基本周期は $2\pi \div \frac{\pi}{4} = 8$ である。関数 $y = 2\sin\frac{\pi(x+3)}{4}$ について、 $\frac{\pi(x+3)}{4} = 0$ のときつまり $x = -3$ のとき $y = 2\sin\frac{\pi(x+3)}{4} = 2\sin 0 = 0$ 。基本周期が 8 なので、関数 $y = 2\sin\frac{\pi(x+3)}{4}$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、

$$-3, -3+4=1, -3-4=-7, -3+8=5, -3-8=-11$$

などである。関数 $\frac{\pi(x+3)}{4}$ は単調増加であり、関数 $2\sin x$ は 0 の付近で単調増加であるので、関数 $2\sin\frac{\pi(x+3)}{4}$ は -3 の付近で単調増加である。 xy 座標平面において関数 $y = 2\sin\frac{\pi(x+3)}{4}$ のグラフは次のようになる。

問題 10.6.6 xy 座標平面において関数 $y = 4\sin\frac{\pi(2x+5)}{6}$ のグラフを考えます。

- 関数 $y = 4\sin\frac{\pi(2x+5)}{6}$ の基本周期を求めなさい。
- 関数 $y = 4\sin\frac{\pi(2x+5)}{6}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めなさい。
- 関数 $y = 4\sin\frac{\pi(2x+5)}{6}$ のグラフを描きなさい。

問題 10.6.7 xy 座標平面において関数 $y = -3\cos\frac{\pi(x-2)}{5}$ のグラフを考えます。

- 関数 $y = -3\cos\frac{\pi(x-2)}{5}$ の基本周期を求めなさい。
- 関数 $y = -3\cos\frac{\pi(x-2)}{5}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標を求めなさい。
- 関数 $y = -3\cos\frac{\pi(x-2)}{5}$ のグラフを描きなさい。