

## §10.5 三角関数の周期

関数  $f$  及び 0 でない定数  $p$  について、

$$f \text{ の定義域の任意の点 } x \text{ について } f(x+p) = f(x)$$

となるとき、定数  $p$  を  $f$  の**周期** (period) といいます。

次のことが成り立ちました (定理 10.3.4) : 任意の実数  $x$  について、

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x, \quad \dots;$$

よって、 $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$  は正弦関数  $\sin x$  の周期です。余弦関数についても同様です：任意の実数  $x$  について、

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x, \quad \cos(x \pm 4\pi) = \cos x, \quad \cos(x \pm 6\pi) = \cos x, \quad \dots;$$

よって、 $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$  は余弦関数  $\cos x$  の周期です。また、次のことが成り立ちました (定理 10.3.5) :  $\frac{\pi}{2}$  の奇数倍でない任意の実数  $x$  について、

$$\tan(x \pm \pi) = \tan x, \quad \tan(x \pm 2\pi) = \tan x, \quad \tan(x \pm 3\pi) = \tan x, \quad \dots;$$

よって、 $\pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \dots$  は正接関数  $\tan x$  の周期です。

関数  $f$  の正の周期の中で最小の実数があるときその実数を  $f$  の**基本周期** (fundamental period) といいます。関数  $f$  の基本周期があるとき、 $f$  を**周期関数** (periodic function) といいます。多くの場合単に周期というと基本周期のことを指します。周期関数の周期を問われたときは基本周期を答えて下さい。

正弦関数のグラフを見ると次のことが分かります： $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$  である各実数  $x$  について  $\sin x < 1$ 。  $0 < p < 2\pi$  である各実数  $p$  について、 $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + p < \frac{5\pi}{2}$  なので  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\right) < 1$ 、よって  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\right) \neq \sin \frac{\pi}{2}$  なので、 $p$  は正弦関数の周期ではありません。  $2\pi$  は正弦関数の周期であり、 $2\pi$  より小さい正の数は正弦関数の周期ではないので、正弦関数の基本周期は  $2\pi$  です。同様に余弦関数の基本周期は  $2\pi$  です。また、正接関数の基本周期は  $\pi$  です。

定数  $a, b$  に対して、関数  $f(x) = \sin(ax+b)$  の基本周期を考えます。任意の実数  $x$  について、

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) &= \sin\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) + b\right) = \sin\left(ax + a \cdot \frac{2\pi}{a} + b\right) \\ &= \sin(ax + 2\pi + b) = \sin(ax + b) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

故に  $\frac{2\pi}{a}$  は関数  $f(x) = \sin(ax+b)$  の周期です。  $a > 0$  のとき、 $\frac{2\pi}{a}$  が関数  $\sin(ax+b)$  の基本周期です。  $a < 0$  のとき、 $\frac{2\pi}{a} < 0$  なので、 $-\frac{2\pi}{a}$  が関数  $\sin(ax+b)$  の基本周期です。このようにして次の定理が成り立ちます。

**定理 10.5.1** 定数  $a$  と  $b$  とは実数で  $a \neq 0$  とする。変数  $x$  の関数  $\sin(ax+b)$  及び関数  $\cos(ax+b)$  は周期関数であり、その基本周期は  $\frac{2\pi}{|a|}$  である。また、関数  $\tan(ax+b)$  は周期関数であり、その基本周期は  $\frac{\pi}{|a|}$  である。

**例** 変数  $x$  の関数  $\sin \frac{4-7x}{3} = \sin\left(-\frac{7}{3}x + \frac{4}{3}\right)$  の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{7}{3}} = \frac{6\pi}{7}. \quad \text{終}$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\cos \frac{\pi(3x-2)}{5} = \cos\left(\frac{3\pi}{5}x - \frac{2\pi}{5}\right)$  の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{5}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}} = \frac{10\pi}{3\pi} = \frac{10}{3}. \quad \text{終}$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\tan \frac{5x-8}{7} = \tan\left(\frac{5}{7}x - \frac{8}{7}\right)$  の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{5}{7}\right|} = \frac{\pi}{\frac{5}{7}} = \frac{7\pi}{5}. \quad \text{終}$$

周期関数と 1 次関数との合成関数の基本周期は次のようになります。

**定理 10.5.2** 定数  $A$  と  $B$  とは実数で  $A \neq 0$  とする。周期関数  $f(x)$  の基本周期が  $p$  であるとき、合成関数  $Af(x)+B$  も周期関数でその基本周期は  $p$  である。

**証明** 関数  $g(x)$  を  $g(x) = Af(x)+B$  と定める。実数  $p$  が関数  $f(x)$  の周期であるとき、定義域の各実数  $x$  について、 $f(x+p) = f(x)$  なので

$$g(x+p) = Af(x+p) + B = Af(x) + B = g(x),$$

よって  $p$  は  $g(x)$  の周期である。  $g(x) = Af(x)+B$  より  $f(x) = \frac{g(x)-B}{A}$ 。定数  $p$  が  $g(x)$  の周期であるとき、定義域の各実数  $x$  について、 $g(x+p) = g(x)$  なので

$$f(x+p) = \frac{g(x+p)-B}{A} = \frac{g(x)-B}{A} = f(x),$$

よって  $p$  は  $f(x)$  の周期である。このように、実数  $p$  について、 $f(x)$  の周期であることと  $g(x) = Af(x)+B$  の周期であることは同値である。従って、関数  $f(x)$  の周期である実数の全体と関数  $Af(x)+B$  の周期である実数の全体とは一致する。故に関数  $f(x)$  の基本周期は関数  $Af(x)+B$  の基本周期である。(証明終り)

**例** 変数  $x$  の関数  $\sin \frac{\pi(5x+2)}{3} = \sin\left(\frac{5\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$  の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{5\pi}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5}.$$

従って関数  $\frac{8}{7} \sin \frac{\pi(5x+2)}{3} + 4$  の基本周期も  $\frac{6}{5}$ 。 終

**例** 変数  $x$  の関数  $\tan \frac{3x-4}{7} = \tan\left(\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}\right)$  の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{3}{7}\right|} = \frac{\pi}{\frac{3}{7}} = \frac{7\pi}{3}.$$

従って関数  $\frac{9}{2} \tan \frac{3x-4}{7} + 5$  の基本周期も  $\frac{7\pi}{3}$ 。 終

**問題 10.5.1** 変数  $x$  の関数  $7 \cos \frac{8-5x}{3} + 4$  の基本周期を求めなさい。

**問題 10.5.2** 変数  $x$  の関数  $7 - 4 \sin \frac{\pi(6x-1)}{5}$  の基本周期を求めなさい。

**問題 10.5.3** 変数  $x$  の関数  $\frac{2}{5} \tan \frac{\pi(3x+5)}{4}$  の基本周期を求めなさい。