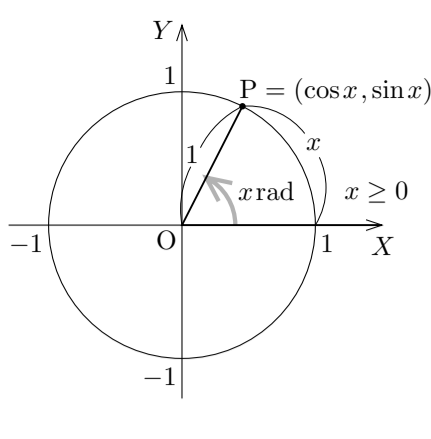


§ 10.4 三角関数のグラフ

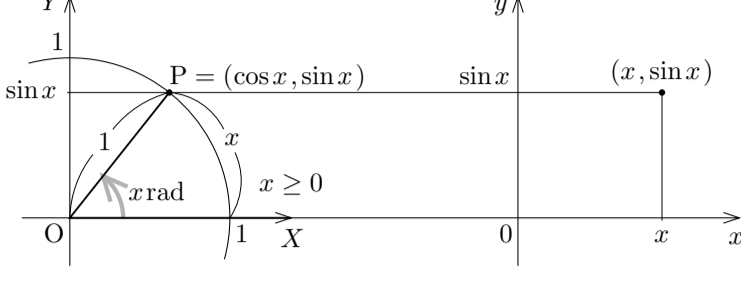
半径 1 の円を単位円といいます。

まず xy 座標平面において正弦関数のグラフを描きます。そのために、もう一つ別の座標系, XY 座標系を考えます。実数 x に対して, XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 x rad の動径と, 原点 O を中心とする単位円との共有点を P とおきます。 \overline{OP} は単位円の半径ですから $\overline{OP} = 1$. 従って定理 6.4.5 より

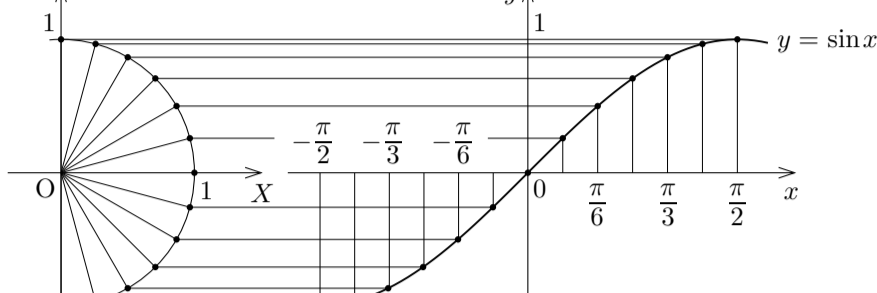
$$P = (\cos x, \sin x) .$$



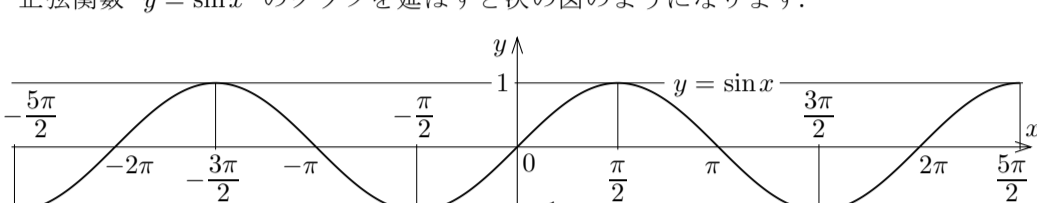
よって点 P の Y 座標は $\sin x$ です。 xy 座標系を次のように定めます: x 軸と X 軸とが同じ向きで一直線に重なり, y 軸と Y 軸とが同じ向きである。 xy 座標平面において, 実数 x に対して例えば次の図のように点 $(x, \sin x)$ をとります。



実数 x に対する点 $(x, \sin x)$ をつないで正弦関数 $y = \sin x$ のグラフを描きます。



正弦関数 $y = \sin x$ のグラフを延ばすと次の図のようになります。



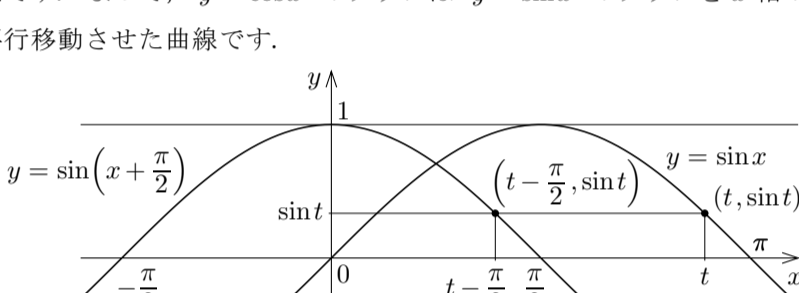
正弦関数 $y = \sin x$ のグラフ

前節で述べたように正弦関数 $\sin x$ は奇関数ですから, 定理 7.8.2 より, $y = \sin x$ のグラフは原点に関して対称です。 $y = \sin x$ のグラフの形の曲線を正弦曲線 (sine curve) といいます。

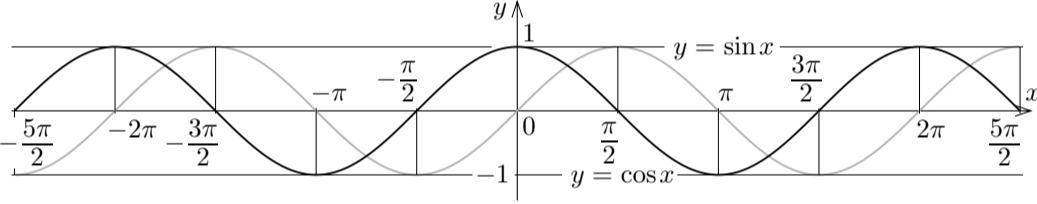
次に, xy 座標平面において余弦関数のグラフを描きます。定理 10.3.2 を用います: 任意の実数 x について $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$. $t = x + \frac{\pi}{2}$ とおきます。このとき $t = x - \frac{\pi}{2}$. 関数 $y = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ のグラフの各点 (x, y) は

$$(x, y) = (x, \sin(x + \frac{\pi}{2})) = (t - \frac{\pi}{2}, \sin t) ;$$

この点は関数 $y = \sin x$ のグラフの点 $(t, \sin t)$ を x 軸の向きに $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動させた点です。よって, $y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動させた曲線です。



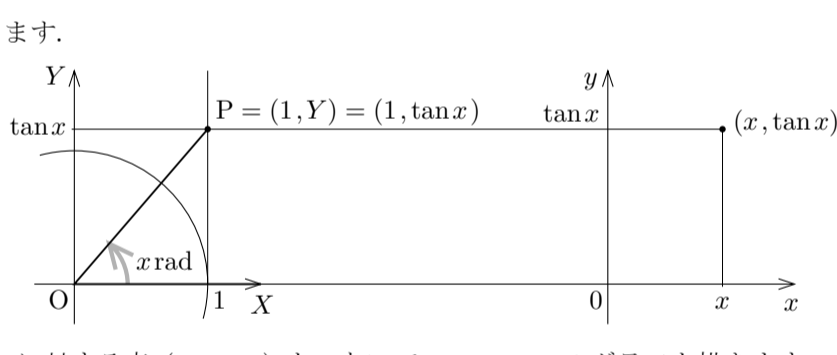
関数 $y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフと同じ形で, 次の図のようになります。



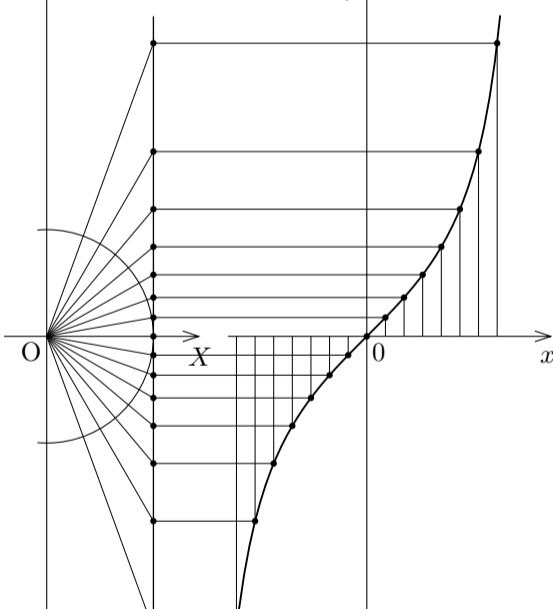
余弦関数 $y = \cos x$ のグラフ

前節で述べたように余弦関数 $\cos x$ は偶関数ですから, 定理 7.8.2 より, $y = \cos x$ のグラフは y 軸に関して対称です。

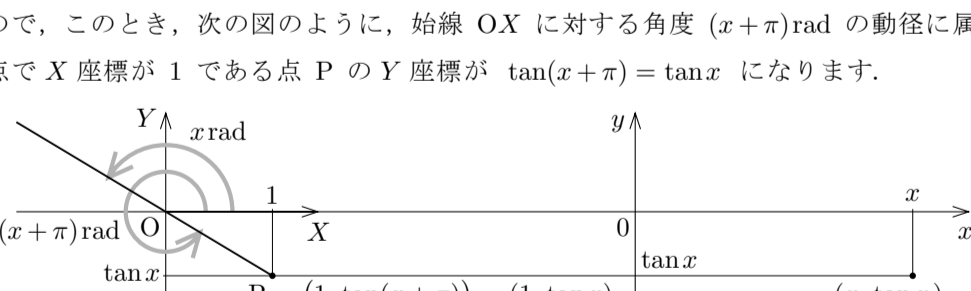
最後に, xy 座標平面において正接関数のグラフを描きます。そのために, もう一つ別の座標系, XY 座標系を考えます。実数 x に対して, XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 x rad の動径に属する点 P の X 座標が 1 であるとおきます。 P の Y 座標を Y とおくと, $P = (1, Y)$, 正接の定義より $\tan x = \frac{Y}{1} = Y$ なので, $Y = \tan x$. 従って点 P の Y 座標は $\tan x$ です。 xy 座標系を次のように定めます: x 軸と X 軸とが同じ向きで一直線に重なり, y 軸と Y 軸とが同じ向きである。こうして実数 x に対して例えば次の図のように点 $(x, \tan x)$ をとります。



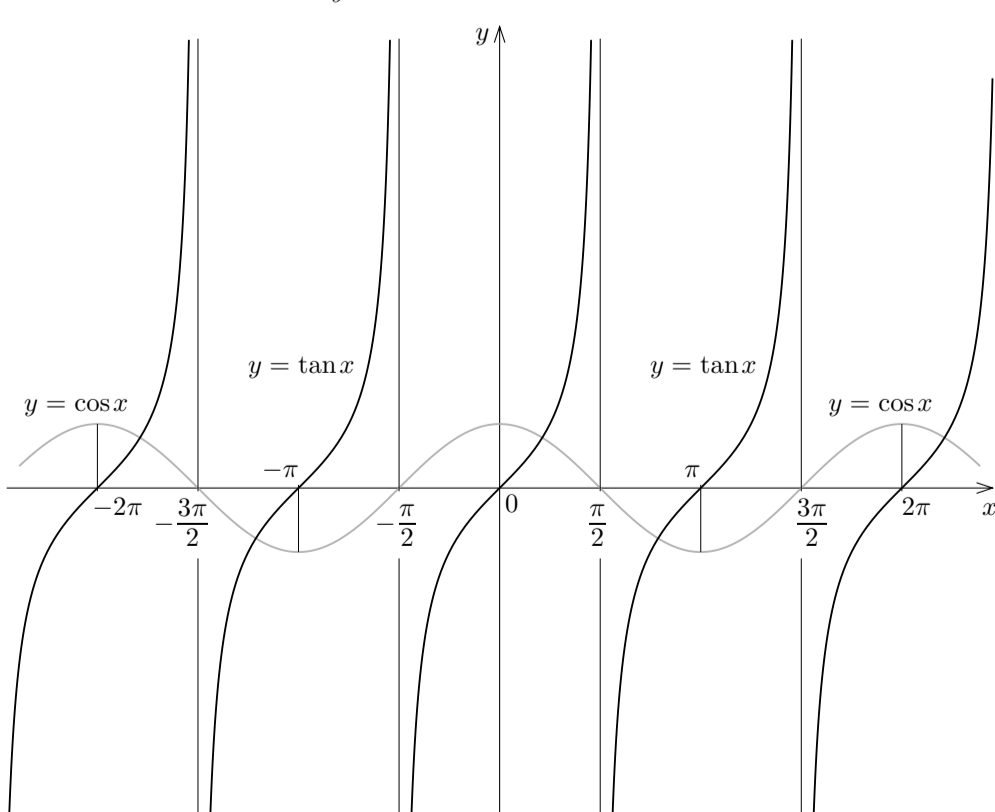
実数 x に対する点 $(x, \tan x)$ をつないで $y = \tan x$ のグラフを描きます。



実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき, $\tan x$ の値がありますが, XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 x rad の動径に属する点で X 座標が 1 である点がないことがあります; 定理 10.3.5 より $\tan(x \pm \pi) = \tan x$ なので, このとき, 次の図のように, 始線 OX に対する角度 $(x + \pi)$ rad の動径に属する点で X 座標が 1 である点 P の Y 座標が $\tan(x + \pi) = \tan x$ になります。



このように考えて正接関数 $y = \tan x$ のグラフを延ばすと次の図のようになります。



正接関数 $y = \tan x$ のグラフ

前節で述べたように正接関数 $\tan x$ は奇関数ですから, 定理 7.8.2 より, $y = \tan x$ のグラフは原点に関して対称です。また, xy 座標平面の直線 $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = -\frac{5\pi}{2}$ などは $y = \tan x$ のグラフの漸近線になります。