

### § 10.3 還元公式

任意の実数  $x$  について、定理 6.4.3 より  $\sin(-x \text{ rad}) = -\sin(x \text{ rad})$  なので、

$$\sin(-x) = \sin(-x \text{ rad}) = -\sin(x \text{ rad}) = -\sin x .$$

同様に、定理 6.4.3 より  $\cos(-x \text{ rad}) = \cos(x \text{ rad})$  なので、

$$\cos(-x) = \cos(-x \text{ rad}) = \cos(x \text{ rad}) = \cos x .$$

更に、定理 10.2.2 より、 $x$  が  $\frac{\pi}{2}$  の奇数倍でないとき

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x .$$

**定理 10.3.1** 任意の実数  $x$  について、

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, & \cos(-x) &= \cos x, \\ x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \tan(-x) &= -\tan x . \end{aligned}$$

つまり、正弦関数  $\sin x$  と正接関数  $\tan x$  とは奇関数で、余弦関数  $\cos x$  は偶関数です。

$x$  は任意の実数とします。定理 6.5 より

$$\sin(x \text{ rad} + 90^\circ) = \cos(x \text{ rad}) = \cos x ,$$

$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  なので

$$\sin(x \text{ rad} + 90^\circ) = \sin\left(x \text{ rad} + \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad}\right\} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

よって  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$  . また、定理 6.5 より

$$\cos(x \text{ rad} + 90^\circ) = -\sin(x \text{ rad}) = -\sin x ,$$

$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  なので

$$\cos(x \text{ rad} + 90^\circ) = \cos\left(x \text{ rad} + \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) = \cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad}\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

よって  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$  .

実数  $X$  について  $\sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = \cos X$  つまり  $\cos X = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$  , この等式において  $X = x - \frac{\pi}{2}$  とすると、

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x .$$

実数  $X$  について  $\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin X$  なので  $\sin X = -\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$  , この等式において  $X = x - \frac{\pi}{2}$  とすると、

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos x .$$

**定理 10.3.2** 任意の実数  $x$  について、

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \quad (\text{複号同順}), \quad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x \quad (\text{複号同順}).$$

$x$  は任意の実数とします。実数  $X$  について  $\sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = \cos X$  ; この等式において  $X = x + \frac{\pi}{2}$  とすると

$$\sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x ,$$

$\sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin(x + \pi)$  なので  $\sin(x + \pi) = -\sin x$  . また、実数  $X$  について  $\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin X$  ; この等式において  $X = x + \frac{\pi}{2}$  とすると

$$\cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x ,$$

$\cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos(x + \pi)$  なので  $\cos(x + \pi) = -\cos x$  . 同様に、

$$\sin(x - \pi) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x ,$$

$$\cos(x - \pi) = \cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x .$$

**定理 10.3.3** 任意の実数  $x$  について、

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x, \quad \cos(x \pm \pi) = -\cos x .$$

$x$  は任意の実数とします。実数  $X$  について  $\sin(X + \pi) = -\sin X$  ; この等式において  $X = x + \pi$  とすると

$$\sin\{(x + \pi) + \pi\} = -\sin(x + \pi) = -(-\sin x) = \sin x ,$$

$\sin\{(x + \pi) + \pi\} = \sin(x + 2\pi)$  なので  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  . また、実数  $X$  について  $\cos(X + \pi) = -\cos X$  ; この等式において  $X = x + \pi$  とすると

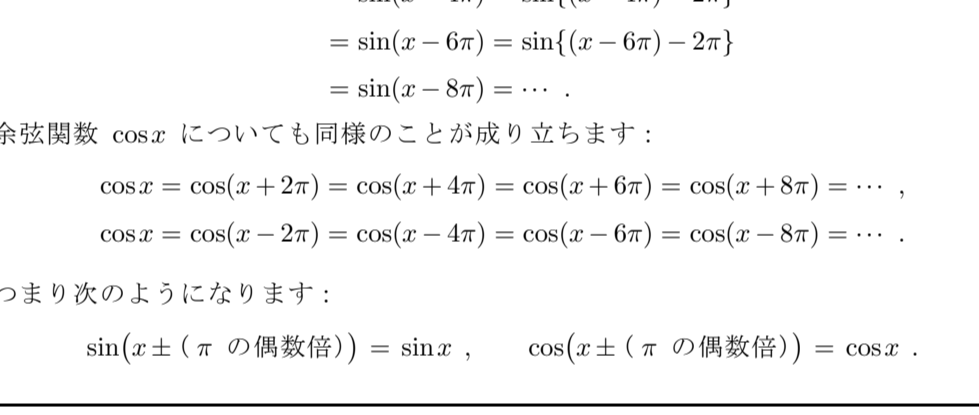
$$\cos\{(x + \pi) + \pi\} = -\cos(x + \pi) = -(-\cos x) = \cos x ,$$

$\cos\{(x + \pi) + \pi\} = \cos(x + 2\pi)$  なので  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  .

こうして次のことが分かります：任意の実数  $x$  について、

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x .$$

このことは次のように考えても分かります。  $XY$  座標平面において原点  $O$  を極として  $X$  軸の向きに伸びる  $OX$  を始線とします。実数  $x$  に対して、次のような点  $P$  をとります：始線  $OX$  に対する角度  $x \text{ rad}$  の動径に  $P$  が属し、 $\overline{OP} = 1$  . 更に、次のような点  $P'$  をとります：始線  $OX$  に対する角度  $(x + 2\pi) \text{ rad}$  の動径に  $P'$  が属し、 $\overline{OP'} = 1$  .



定理 6.4.4 より、

$$P = (\cos x, \sin x), \quad P' = (\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)) .$$

線分  $OP'$  は線分  $OP$  を更に 1 回転させたものですから、点  $P'$  は点  $P$  と一致します：  $P' = P$  . 従って  $(\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)) = (\cos x, \sin x)$  なので、

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x .$$

$x$  は任意の実数とします。任意の実数  $X$  について  $\sin X = \sin(X + 2\pi)$  なので、

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x + 2\pi) = \sin\{(x + 2\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 4\pi) = \sin\{(x + 4\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 6\pi) = \sin\{(x + 6\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 8\pi) = \dots \end{aligned}$$

同様に、任意の実数  $X$  について  $\sin X = \sin\{(X - 2\pi) + 2\pi\} = \sin(X - 2\pi)$  なので、

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x - 2\pi) = \sin\{(x - 2\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 4\pi) = \sin\{(x - 4\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 6\pi) = \sin\{(x - 6\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 8\pi) = \dots \end{aligned}$$

余弦関数  $\cos x$  についても同様のことが成り立ちます：

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos(x + 6\pi) = \cos(x + 8\pi) = \dots ,$$

$$\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 6\pi) = \cos(x - 8\pi) = \dots .$$

つまり次のようになります：

$$\sin(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})) = \sin x, \quad \cos(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})) = \cos x .$$

**定理 10.3.4** 任意の整数  $n$  及び任意の実数  $x$  について、

$$\sin(x \pm 2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2n\pi) = \cos x .$$

実数  $X$  は  $\frac{\pi}{2}$  の奇数倍でないとします。定理 10.3.3 より  $\sin(X + \pi) = -\sin X$  ,  $\cos(X + \pi) = -\cos X$  なので、定理 10.1 より、

$$\tan(X + \pi) = \frac{\sin(X + \pi)}{\cos(X + \pi)} = \frac{-\sin X}{-\cos X} = \frac{\sin X}{\cos X} = \tan X .$$

つまり  $\tan X = \tan(X + \pi)$  . このことから、実数  $x$  が  $\frac{\pi}{2}$  の奇数倍でないとき、

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan(x + \pi) = \tan\{(x + \pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 2\pi) = \tan\{(x + 2\pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 3\pi) = \tan\{(x + 3\pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 4\pi) = \dots ; \end{aligned}$$

$\tan(X - \pi) = \tan\{(X - \pi) + \pi\} = \tan X$  つまり  $\tan X = \tan(X - \pi)$  なので、

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan(x - \pi) = \tan\{(x - \pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 2\pi) = \tan\{(x - 2\pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 3\pi) = \tan\{(x - 3\pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 4\pi) = \dots . \end{aligned}$$

**定理 10.3.5** 任意の整数  $n$  及び任意の実数  $x$  について、

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \tan(x \pm n\pi) = \tan x .$$

**例題** 次の式を計算する：  $\sin \frac{29\pi}{3}$  .

$$\sin \frac{29\pi}{3} = \sin\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \sin \frac{29\pi}{3} &= \sin\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \sin \frac{5\pi}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) \\ &= -\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} . \end{aligned}$$

終

**問題 10.3.1** 次の式を計算しなさい：  $\cos \frac{35\pi}{6}$  .

**例題** 次の式を計算する：  $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$  .

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= -\sin \frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right) = -\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

終

**問題 10.3.2** 次の式を計算しなさい：  $\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$  .

**例題** 次の式を計算する：  $\tan \frac{14\pi}{3}$  .

$$\tan \frac{14\pi}{3} = \tan\left(\frac{14\pi}{3} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} .$$

終

**問題 10.3.3** 次の式を計算しなさい：  $\tan \frac{17\pi}{6}$  .

**問題 10.3.4** 次の式を計算しなさい：  $\tan\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$  .

**例題** 変数  $x$  を含む式  $\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right)$  を、 $\sin x$  か  $\cos x$  か  $-\sin x$  か  $-\cos x$  かのいずれかに変形する。

$$\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 8\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) &= \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 6\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin x) \\ &= \sin x . \end{aligned}$$

終

**問題 10.3.5** 変数  $x$  を含む式  $\sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right)$  を、 $\sin x$  か  $\cos x$  か  $-\sin x$  か  $-\cos x$  かのいずれかに変形しなさい。

**例題** 変数  $x$  を含む式  $\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)$  を、 $\sin x$  か  $\cos x$  か  $-\sin x$  か  $-\cos x$  かのいずれかに変形する。

$$\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 8\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) &= \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 10\pi\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos x . \end{aligned}$$

終

**問題 10.3.6** 変数  $x$  を含む式  $\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right)$  を、 $\sin x$  か  $\cos x$  か  $-\sin x$  か  $-\cos x$  かのいずれかに変形しなさい。

**例題** 変数  $x$  を含む式  $\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)$  を、 $\sin x$  か  $\cos x$  か  $-\sin x$  か  $-\cos x$  かのいずれかに変形する。

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left\{-\left(x - \frac{15\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x - \frac{15\pi}{2} + 8\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x . \end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(\frac{15\pi}{2} - x - 8\pi\right) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left\{-\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x . \end{aligned}$$

終

**問題 10.3.7** 変数  $x$  を含む式  $\sin\left(\frac{25\pi}{2} - x\right)$  を、 $\sin x$  か  $\cos x$  か  $-\sin x$  か  $-\cos x$  かのいずれかに変形しなさい。