

§ 10.2 三角関数の定義

正弦関数 (sine function) と**余弦関数** (cosine function) と**正接関数** (tangent function) とを定義します。 これらを総称して三角関数 (trigonometric functuon) といいます。

定義 実数 x に対して、正弦関数の値 $\sin x$, 余弦関数の値 $\cos x$, 正接関数の値 $\tan x$ を次のように定義する： XY 座標平面において、原点 $O = (0, 0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する一般角 $x\text{rad}$ の動径に属す点 $P = (a, b)$ (但し $P \neq O$) について $r = \overline{OP}$ とおくとき、

$$\sin x = \frac{b}{r}, \quad \cos x = \frac{a}{r},$$

$$a \neq 0 \text{ のとき } \tan x = \frac{b}{a}.$$

実数 x における正弦関数の値 $\sin x$ の定義は、6.3節で述べた一般角 θ の正弦 $\sin \theta$ の値の定義において $\theta = x\text{rad}$ としたものです。従って、正弦関数の値 $\sin x$ は一般角 $x\text{rad}$ の正弦 $\sin(x\text{rad})$ と同じです。同様に、余弦関数の値 $\cos x$ は一般角 $x\text{rad}$ の余弦 $\cos(x\text{rad})$ と同じです。

$$\sin x = \sin(x\text{rad}), \quad \cos x = \cos(x\text{rad}).$$

一般角 θ が $90^\circ = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ の奇数倍でないとき正接 $\tan \theta$ の値がありました。実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、一般角 $x\text{rad}$ は $\frac{\pi}{2}\text{rad}$ の奇数倍でないので、正接 $\tan(x\text{rad})$ の値があり、正接関数の値 $\tan x$ は $\tan(x\text{rad})$ と同じです；

$$\text{実数 } x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \tan x = \tan(x\text{rad}).$$

例 $\frac{\pi}{6}\text{rad} = \frac{1}{6} \times 180^\circ = 30^\circ$ なので、

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\text{rad}\right) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

実数 30 における正弦関数の値 $\sin 30$ は角度 30° の正弦の値 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$ とは

異なります： $30\text{rad} = \frac{30}{\pi} \times \pi\text{rad} = \frac{30}{\pi} \times 180^\circ = \left(\frac{5400}{\pi}\right)^\circ \doteq 1718.87^\circ$ なので、

$$\sin 30 = \sin(30\text{rad}) \doteq \sin 1718.87^\circ \doteq -0.988. \quad \text{終}$$

例 $\frac{\pi}{2}\text{rad} = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ なので、

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) = \cos 90^\circ = 0. \quad \text{終}$$

例 $\frac{\pi}{3}\text{rad} = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$ なので、

$$\tan \frac{\pi}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\text{rad}\right) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}. \quad \text{終}$$

以下の値は憶えて下さい。

$$\begin{aligned} \sin 0 &= \sin 0^\circ = 0, & \cos 0 &= \cos 0^\circ = 1, & \tan 0 &= \tan 0^\circ = 0; \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, & \cos \frac{\pi}{6} &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan \frac{\pi}{6} &= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos \frac{\pi}{4} &= \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \tan \frac{\pi}{4} &= \tan 45^\circ = 1; \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{3} &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, & \tan \frac{\pi}{3} &= \tan 60^\circ = \sqrt{3}; \\ \sin \frac{\pi}{2} &= \sin 90^\circ = 1, & \cos \frac{\pi}{2} &= \cos 90^\circ = 0, & \tan \frac{\pi}{2} &\text{の値は無い}. \end{aligned}$$

定理6.4.6を思い起こして下さい：任意の一般角 θ について、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$,

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$. 任意の実数 x に対する一般角 $x\text{rad}$ について、

$$-1 \leq \sin(x\text{rad}) \leq 1, \quad -1 \leq \cos(x\text{rad}) \leq 1;$$

$\sin(x\text{rad}) = \sin x$, $\cos(x\text{rad}) = \cos x$ なので、

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

定理 10.2.1 任意の実数 x について、

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

定理6.4.1を思い起こして下さい：一般角 θ が角度 $90^\circ = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ の奇数倍でないとき

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. 実数 x について、一般角 $x\text{rad}$ が角度 $\frac{\pi}{2}\text{rad}$ の奇数倍でないとき、

つまり x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$\tan(x\text{rad}) = \frac{\sin(x\text{rad})}{\cos(x\text{rad})},$$

$\tan(x\text{rad}) = \tan x$, $\sin(x\text{rad}) = \sin x$, $\cos(x\text{rad}) = \cos x$ なので

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

定理 10.2.2 任意の実数 x について、

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

以後、正弦関数と余弦関数については、特に断りがない限り、定義域は実数全体とします。また、正接関数については、特に断りがない限り、 $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数の全体とします。

定義に従って三角関数の値を求めてみます。

例題 実数 x に対して、 XY 座標平面において原点 $O = (0, 0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\text{rad}$ の動径に点 $P = (-3, -2)$ が属すとする。

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求める。

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{13}.$$

正弦・余弦・正接の定義より、

$$\sin x = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\cos x = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\tan x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

終

問題 10.2.1 実数 x に対して、 XY 座標平面において原点 $O = (0, 0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\text{rad}$ の動径に点 $P = (-5, 4)$ が属とします。 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求めなさい。

例題 実数 x に対して、 XY 座標平面において原点 $O = (0, 0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\text{rad}$ の動径に点 $P = (0, 4)$ が属とすると。

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求める。

$\overline{OP} = 4$ なので、 $\sin x = \frac{4}{4} = 1$, $\cos x = \frac{0}{4} = 0$. 点 P の X 座標が 0 なので、

$\tan x$ の値は無い。 終

問題 10.2.2 実数 x に対して、 XY 座標平面において原点 $O = (0, 0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\text{rad}$ の動径に点 $P = (0, -3)$ が属とします。 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求めなさい。

例解 $\frac{19\pi}{4}$ の正弦 $\sin \frac{19\pi}{4}$, 余弦 $\cos \frac{19\pi}{4}$, 正接 $\tan \frac{19\pi}{4}$ の各々の値を求めます。
 XY 座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $\frac{19\pi}{4}\text{rad}$ の動径に属す点 P ($P \neq O$) をとり、点 P から X 軸に下した垂線の足を H とおき、直角三角形 OPH に着目します。

$$\begin{aligned} \angle POH &= \pi\text{rad} - \left(\frac{19\pi}{4}\text{rad} - 4\pi\text{rad}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\text{rad} = 45^\circ. \end{aligned}$$

よって三角形 OHP は直角二等辺三角です

から、

$$\overline{PH} : \overline{HO} : \overline{OP} = 1 : 1 : \sqrt{2}.$$

$r = \overline{OP} = \sqrt{2}$ とします。 $P = (a, b)$ とおき

ます。

$$|a| = \overline{OH} = 1, \quad |b| = \overline{HP} = 1.$$

$a < 0$ なので $a = -1$, $b > 0$ なので $b = 1$. 従って、

$$\sin \frac{19\pi}{4} = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{19\pi}{4} = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan \frac{19\pi}{4} = \frac{b}{a} = -1. \quad \text{終}$$

問題 10.2.3 次の式の値を求めなさい： $\sin \frac{11\pi}{3}$, $\cos \frac{11\pi}{3}$, $\tan \frac{11\pi}{3}$.

例解 $-\frac{17\pi}{6}$ の正弦 $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$, 余弦 $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$, 正接 $\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$ の各々の値を求めます。
 XY 座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $-\frac{17\pi}{6}\text{rad}$ の動径に属す点 P ($P \neq O$) をとり、点 P から X 軸に下した垂線の足を H とおき、直角三角形 OPH に着目します。

$$\angle POH = 3\pi\text{rad} - \frac{17\pi}{6}\text{rad} = \frac{\pi}{6}\text{rad} = 30^\circ.$$

よって直角三角形 OPH の内角は 30° と 60°

と 90° なので、

$$\overline{HP} : \overline{PO} : \overline{OH} = 1 : 2 : \sqrt{3}.$$

$r = \overline{OP} = 2$ とします。 $P = (a, b)$ とおき

ます。

$$|a| = \overline{OH} = \sqrt{3}, \quad |b| = \overline{HP} = 1.$$

$a < 0$ なので $a = -\sqrt{3}$, $b < 0$ なので $b = -1$. 従って、

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{b}{r} = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \text{終}$$

問題 10.2.4 次の式の値を求めなさい： $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$.

更に正割関数と余割関数と余接関数との3個の三角関数を定義します。正割関数 (secant function) とは、 $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない各実数 x に $\frac{1}{\cos x}$ の値を対応させる関数です。正割関数の値を $\sec x$ と書き表します：

$$\text{実数 } x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

余割関数 (cosecant function) とは、 π の整数倍でない各実数 x に $\frac{1}{\sin x}$ の値を対応させる関数です。余割関数の値を $\operatorname{cosec} x$ と書き表します：

$$\text{実数 } x \text{ が } \pi \text{ の整数倍でないとき } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

余接関数 (cotangent function) とは、 π の整数倍でない各実数 x に $\frac{\cos x}{\sin x}$ の値を対応させる関数です。余接関数の値を $\cot x$ と書き表します：

$$\text{実数 } x \text{ が } \pi \text{ の整数倍でないとき } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例題 次の式の値を求める： $\cot \frac{\pi}{6}$, $\sec \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$.

$$\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}. \quad \text{終}$$

問題 10.2.5 以下の式の値を求めなさい。

$$(1) \cot \frac{\pi}{3}. \quad (2) \sec \frac{\pi}{4}. \quad (3) \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6}.$$