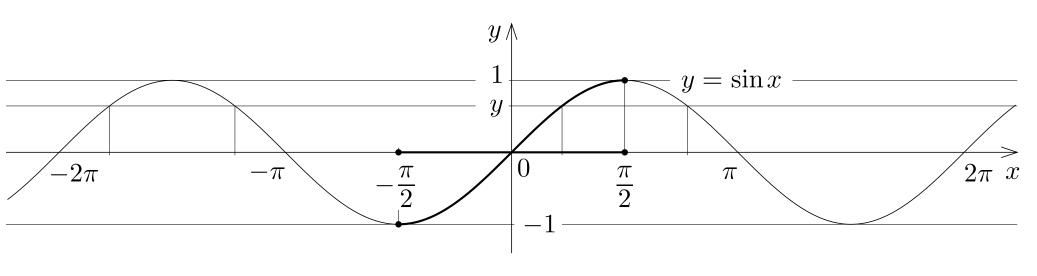
§10.10　逆三角関数

7.6節で述べたように，関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ である f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の逆関数 f^{-1} があります．

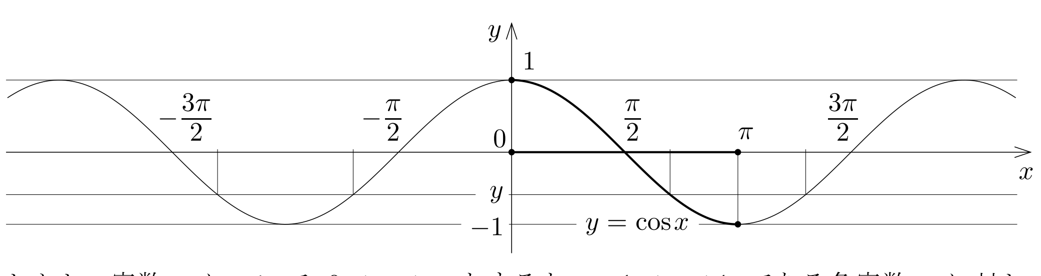
正弦関数 $y=\sin x$ について，xy 座標平面におけるグラフを見ると分かるように，$-1\le y\le 1$ である各実数 y に対して $y=\sin x$ である実数 x は数多くあるので，このままでは正弦関数 $\sin x$ の逆関数があるとはいえません．



しかし，実数 x について $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ とすると，$-1\le y\le 1$ である各実数 y に対して $y=\sin x$ である x は唯一つあります． 正弦関数 $\sin x$ の定義域を区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ に制限すると，値域である区間 $[-1,1]$ の各実数 y に対して $y=\sin x$ である実数 x は唯一つあるので，逆関数があります；この正弦関数の逆関数を**逆正弦関数** (inverse sine function) といいます．

定義　定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $\sin x$ の逆関数を逆正弦関数といい，逆正弦関数の実数 x における値を $\sin^{-1}x$ あるいは $\arcsin x$ と書き表す[2)]． 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は区間 $[-1,1]$ である．

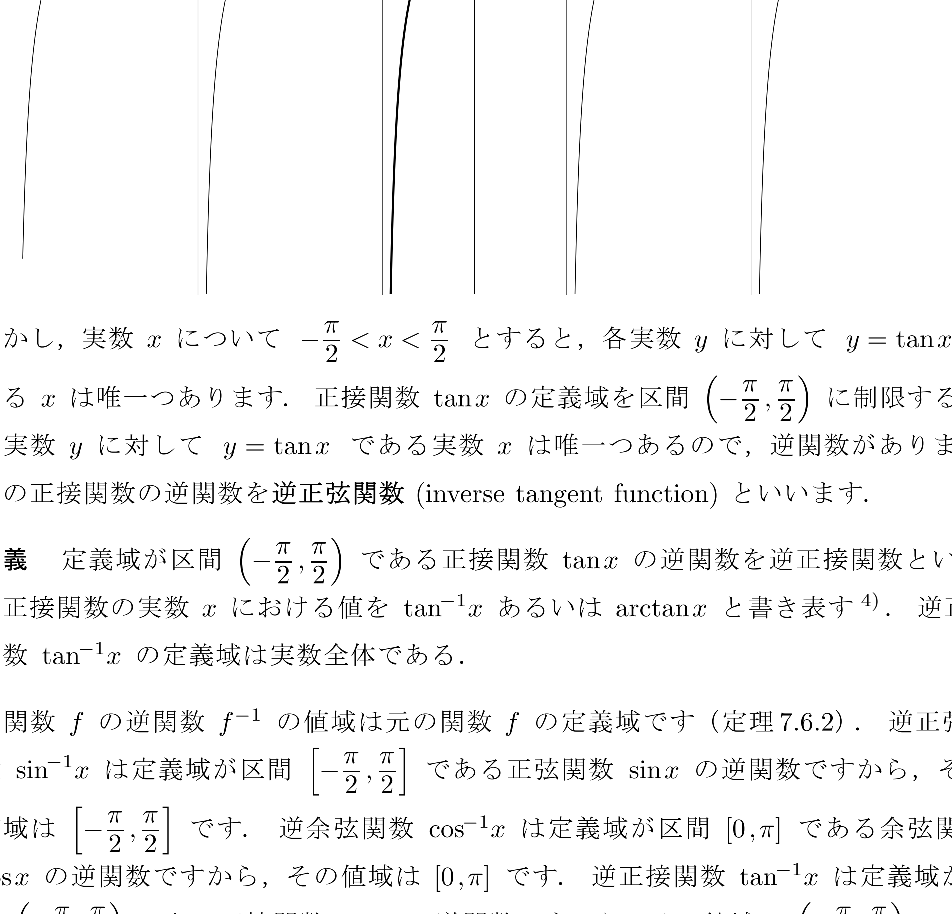
余弦関数 $y=\cos x$ グラフを見ると分かるように，$-1\le y\le 1$ である実数 y に対して $y=\cos x$ である実数 x は数多くあるので，このままでは余弦関数 $\cos x$ の逆関数があるといえません．



しかし，実数 x について $0\le x\le\pi$ とすると，$-1\le y\le 1$ である各実数 y に対して $y=\cos x$ である x は唯一つあります． 余弦関数 $\cos x$ の定義域を区間 $[0,\pi]$ に制限すると，値域である区間 $[-1,1]$ の各実数 y に対して $y=\cos x$ である実数 x は唯一つあるので，逆関数があります；この余弦関数の逆関数を**逆余弦関数** (inverse cosine function) といいます．

定義　定義域が区間 $[0,\pi]$ である余弦関数 $\cos x$ の逆関数を逆余弦関数といい，逆余弦関数の実数 x における値を $\cos^{-1}x$ あるいは $\arccos x$ と書き表す[3)]． 逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は区間 $[-1,1]$ である．

各実数 y に対して $y=\tan x$ である実数 x は数多くあるので，このままでは正接関数 $\tan x$ の逆関数があるとはいえません．



しかし，実数 x について $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ とすると，各実数 y に対して $y=\tan x$ である x は唯一つあります． 正接関数 $\tan x$ の定義域を区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ に制限すると，各実数 y に対して $y=\tan x$ である実数 x は唯一つあるので，逆関数があります． この正接関数の逆関数を**逆正弦関数** (inverse tangent function) といいます．

定義　定義域が区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ である正接関数 $\tan x$ の逆関数を逆正接関数といい，逆正接関数の実数 x における値を $\tan^{-1}x$ あるいは $\arctan x$ と書き表す[4)]． 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の定義域は実数全体である．

関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は元の関数 f の定義域です（定理7.6.2）． 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ は定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $\sin x$ の逆関数ですから，その値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ です． 逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ は定義域が区間 $[0,\pi]$ である余弦関数 $\cos x$ の逆関数ですから，その値域は $[0,\pi]$ です． 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は定義域が区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ である正接関数 $\tan x$ の逆関数ですから，その値域は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ です．

> 実数 x について，
>
> $\sin^{-1}x$ の値がある条件は $-1\le x\le 1$ で，このとき $-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{2}$ ；
>
> $\cos^{-1}x$ の値がある条件は $-1\le x\le 1$ で，このとき $0\le\cos^{-1}x\le\pi$ ；
>
> x がどんな実数でも $\tan^{-1}x$ の値があって $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ ．

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ ですが，定義域が区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限された関数 $\sin^{-1}x$ も逆正弦関数といいます． 逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は本来は区間 $[-1,1]$ ですが，定義域が区間 $[-1,1]$ の部分集合に制限された関数 $\cos^{-1}x$ も逆余弦関数といいます． 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の定義域は本来は実数全体ですが，定義域が実数全体のの部分集合に制限された関数 $\tan^{-1}x$ も逆正接関数といいます． これらの関数を逆三角関数 (inverse trigonometric function) といいます．

例えば $\sin^{-1}x$ と $(\sin x)^{-1}$ との違いを理解して下さい． $\sin^{-1}x$ は正弦関数 $\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数で，$(\sin x)^{-1}=\dfrac{1}{\sin x}=\mathrm{cosec}\,x$ は $\sin x$ の逆数です．

定理7.6.3を思い起こして下さい：関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } u \text{ について } f^{-1}\big(f(u)\big)=u\ ,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } v \text{ について } f\big(f^{-1}(v)\big)=v\ .$$

定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $f(x)=\sin x$ の逆関数が定義域が区間 $[-1,1]$ である逆正弦関数 $f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$ ですから，

$$-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \sin^{-1}(\sin u)=u\ ,$$

$$-1\le v\le 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \sin(\sin^{-1}v)=v\ .$$

定義域が区間 $[0,\pi]$ である余弦関数 $f(x)=\cos x$ の逆関数が定義域が区間 $[-1,1]$ である逆余弦関数 $f^{-1}(x)=\cos^{-1}x$ ですから，

$$0\le u\le\pi \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \cos^{-1}(\cos u)=u\ ,$$

$$-1\le v\le 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \cos(\cos^{-1}v)=v\ .$$

定義域が区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ である正接関数 $f(x)=\tan x$ の逆関数が定義域が実数全体である逆正接関数 $f^{-1}(x)=\tan^{-1}x$ ですから，

$$-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \tan^{-1}(\tan u)=u\ ,$$

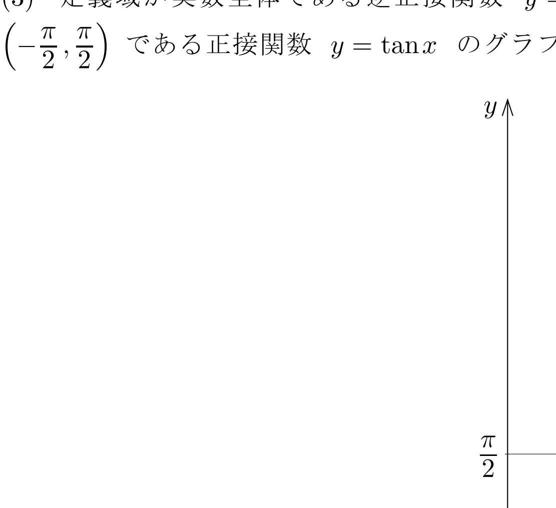
$$\text{任意の実数 } v \text{ について } \tan(\tan^{-1}v)=v\ .$$

> **定理** 10.10.1　三角関数と逆三角関数について以下のことが成り立つ．
>
> $$-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \sin^{-1}(\sin u)=u\ .$$
>
> $$0\le u\le\pi \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \cos^{-1}(\cos u)=u\ .$$
>
> $$-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \tan^{-1}(\tan u)=u\ .$$
>
> 更に以下のことが成り立つ．
>
> $$-1\le v\le 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \sin(\sin^{-1}v)=v\ .$$
>
> $$-1\le v\le 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \cos(\cos^{-1}v)=v\ .$$
>
> $$\text{任意の実数 } v \text{ について } \tan(\tan^{-1}v)=v\ .$$

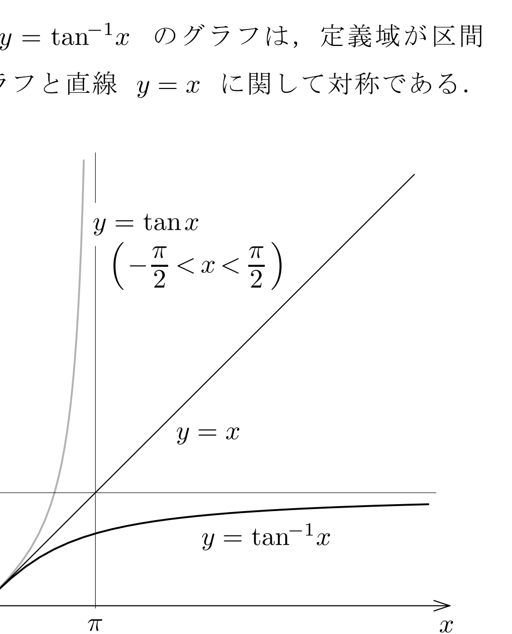
xy 座標平面において関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です（定理7.7）．

(1)　定義域が区間 $[-1,1]$ である逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ のグラフは，定義域が区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ である正弦関数 $y=\sin x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

(2)　定義域が区間 $[-1,1]$ である逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ のグラフは，定義域が区間 $[0,\pi]$ である余弦関数 $y=\cos x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

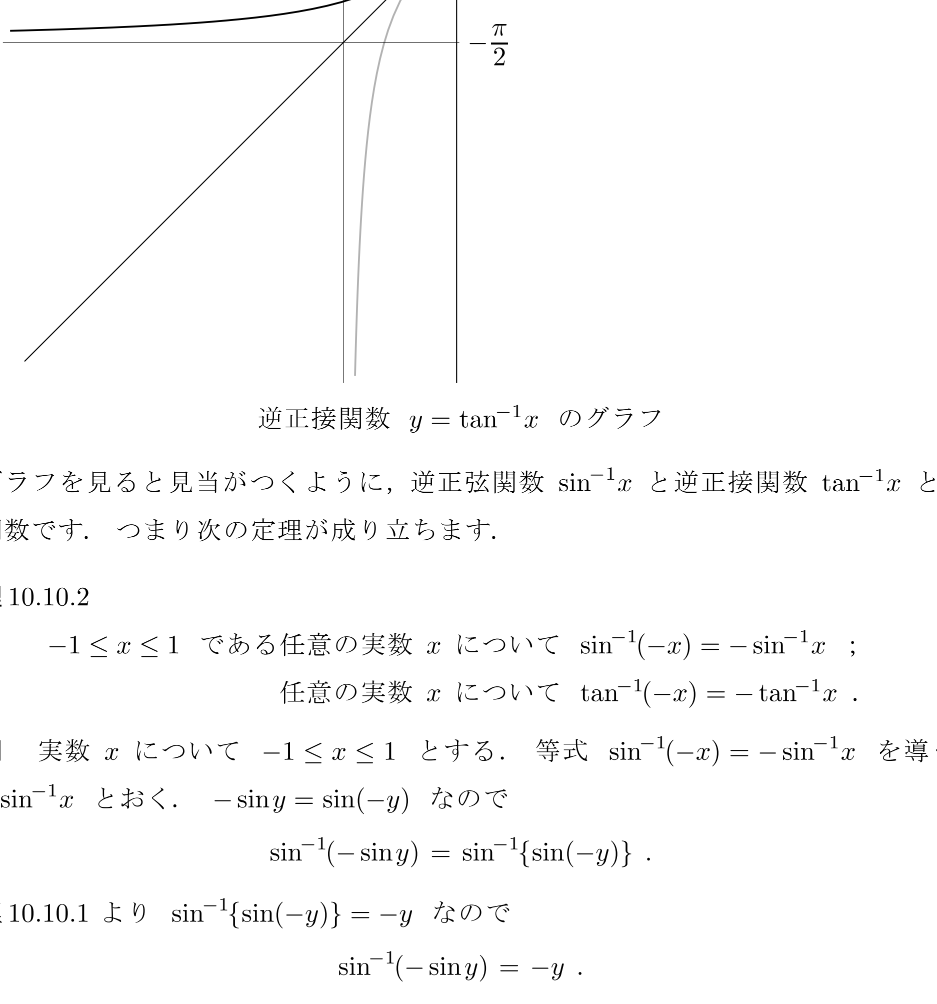


逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ のグラフ



逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ のグラフ

(3)　定義域が実数全体である逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ のグラフは，定義域が区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ である正接関数 $y=\tan x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．



逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ のグラフ

グラフを見ると見当がつくように，逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ と逆正接関数 $\tan^{-1}x$ とは奇関数です． つまり次の定理が成り立ちます．

定理 10.10.2

$$-1\le x\le 1 \text{ である任意の実数 } x \text{ について } \sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x\ ;$$

$$\text{任意の実数 } x \text{ について } \tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x\ .$$

証明　実数 x について $-1\le x\le 1$ とする． 等式 $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ を導く． $y=\sin^{-1}x$ とおく． $-\sin y=\sin(-y)$ なので

$$\sin^{-1}(-\sin y)\ =\ \sin^{-1}\{\sin(-y)\}\ .$$

定理10.10.1 より $\sin^{-1}\{\sin(-y)\}=-y$ なので

$$\sin^{-1}(-\sin y)\ =\ -y\ .$$

$y=\sin^{-1}x$ なので

$$\sin^{-1}\{-\sin(\sin^{-1}x)\}\ =\ -\sin^{-1}x\ .$$

定理10.10.1 より $\sin(\sin^{-1}x)=x$ なので， $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ ．

任意の実数 x について $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$ となることも同様に証明できる．

（証明終り）

因みに，逆余弦関数については次のようになります：$-1\le x\le 1$ である任意の実数 x について $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　以下の値を求める：$\sin^{-1}\frac{1}{2}$，$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ．

定理10.10.1と定理10.10.2とを用いる． $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ なので，

$$\sin^{-1}\frac{1}{2}\ =\ \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\ =\ \frac{\pi}{6}\ ,\qquad \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\ =\ -\sin^{-1}\frac{1}{2}\ =\ -\frac{\pi}{6}\ .$$

$\boxed{\text{問題 10.10.1}}$　以下の逆三角関数の値を求めなさい．

(1) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ．　(2) $\sin^{-1}0$ ．　(3) $\sin^{-1}(-1)$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　以下の値を求める：$\tan^{-1}\sqrt{3}$，$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ ．

定理10.10.1と定理10.10.2とを用いる． $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ なので，

$$\tan^{-1}\sqrt{3}=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\ ,\qquad \tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\tan^{-1}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.10.2}}$　以下の逆三角関数の値を求めなさい．

(1) $\tan^{-1}1$ ．　(2) $\tan^{-1}0$ ．　(3) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$ ．

〔解説〕 $x=\cos^{-1}\frac{3}{4}$ とおく． $\sin x$ を計算する．

$$\cos x\ =\ \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ \frac{3}{4}\ .$$

従って，

$$\sin^2x\ =\ 1-\cos^2x\ =\ 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\ =\ \frac{7}{16}\ .$$

$0\le\cos^{-1}\frac{3}{4}\le\pi$ なので $0\le x\le\pi$ なので $\sin x\ge 0$ ． よって

$$\sin x\ =\ \sqrt{\frac{7}{16}}\ =\ \frac{\sqrt{7}}{4}\ .$$

故に， $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)=\sin x=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.10.3}}$　次の式を計算しなさい：$\cos\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　次の式を計算する：$\cos(\tan^{-1}3)$ ．

〔解説〕 $x=\tan^{-1}3$ とおく． $\cos x$ を計算する．

$$\tan x\ =\ \tan(\tan^{-1}3)\ =\ 3\ .$$

従って， $1+\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$ より，

$$\cos^2x\ =\ \frac{1}{1+\tan^2x}\ =\ \frac{1}{1+3^2}\ =\ \frac{1}{10}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}3<\frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ なので $\cos x>0$ ． よって

$$\cos x\ =\ \sqrt{\frac{1}{10}}\ =\ \frac{1}{\sqrt{10}}\ .$$

故に， $\cos(\tan^{-1}3)=\cos x=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.10.4}}$　次の式を計算しなさい：$\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 6)$ ．

〔解説〕 実数 a について $-\frac{\pi}{2}\le a\le\frac{\pi}{2}$ のときに限り $\sin^{-1}(\sin a)=a$ ． この公式を適用できるように $\sin^{-1}(\sin 6)$ を変形する． 正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π なので， $\sin 6=\sin(6-2\pi)$ ． $2\pi\fallingdotseq 6.28$ なので， $6-2\pi\fallingdotseq 6-6.28=-0.28$ ，よって $-\frac{\pi}{2}\le 6-2\pi\le\frac{\pi}{2}$ なので，

$$\sin^{-1}(\sin 6)=\sin^{-1}\{\sin(6-2\pi)\}=6-2\pi\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.10.5}}$　次の式を計算しなさい：$\sin^{-1}\{\sin(-7)\}$ ．

$\boxed{\text{問題 10.10.6}}$　次の式を計算しなさい：$\sin^{-1}(\sin 13)$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　次の式を計算する：$\tan^{-1}(\tan 4)$ ．

〔解説〕 実数 a について $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$ のときに限り $\tan^{-1}(\tan a)=a$ ． この公式を適用できるように $\tan^{-1}(\tan 4)$ を変形する． 正接関数 $\tan x$ の基本周期は π なので， $\tan 4=\tan(4-\pi)$ ． $\pi\fallingdotseq 3.14$ なので， $4-\pi\fallingdotseq 4-3.14=0.86$ ，よって $-\frac{\pi}{2}\le 4-\pi\le\frac{\pi}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan 4)=\tan^{-1}\{\tan(4-\pi)\}=4-\pi\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.10.7}}$　次の式を計算しなさい：$\tan^{-1}\{\tan(-3)\}$ ．

$\boxed{\text{問題 10.10.8}}$　次の式を計算しなさい：$\tan^{-1}(\tan 9)$ ．

---

2)　$\sin^{-1}$ も arcsin も “アークサイン” と言います．

3)　$\cos^{-1}$ も arccos も “アークコサイン” と言います．

4)　$\tan^{-1}$ も arctan も “アークタンジェント” と言います．