§1.9　複素数の性質

総ての実数は複素数であり，複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数です．実数 b と虚数単位 i は複素数ですから，それらの積 ib は複素数です．また，複素数 ib と実数 a との和 $a+ib$ も複素数です．つまり，任意の実数 a と b とに対して $a+ib$ は複素数です．このような形の複素数どうしの和・差・積・商を考えます．

例　複素数 $\alpha=5-4i$ と $\beta=2+3i$ とについて次のように四則演算ができます:

$$\alpha+\beta=5-4i+2+3i=7-i\ ,$$
$$\alpha-\beta=5-4i-(2+3i)=3-7i\ ,$$
$$\alpha\beta=(5-4i)(2+3i)=10+15i-8i-12i^2=10+7i+12 =22+7i\ ,$$
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5-4i}{2+3i}=\frac{(5-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{10-15i-8i+12i^2}{2^2-3^2i^2}=\frac{10-23i-12}{4+9} =-\frac{2}{13}-\frac{23}{13}i\ .$$
終

このように計算すると，$a+ib$（a,b は実数）の形の複素数どうしの和・差・積・商はやはり $a+ib$（a,b は実数）の形に整理できます．ですから，複素数は $a+ib$（a,b は実数）の形で総て間に合います．

> 複素数とは $a+ib$（a,b は実数）の形で表せる数である．

複素数 α について $\alpha=a+ib$（a,b は実数）であるとき，実数 a を複素数 α の実部といい，実数 b を複素数 α の虚部といいます．

複素数について以下の定理が成り立ちます．証明は後に回します．

定理 1.9.1　実数 a と b とについて，
$$a+ib=0 \iff a=b=0\ .$$

定理 1.9.2　実数 a,b,c,d について，
$$a+ib=c+id \iff a=c \text{ かつ } b=d\ .$$

例題　実数 x と y とについて $(2x+y)+i(x+3y)=4-3i$ とする．このような実数 x,y を求める．

〔解説〕　x と y とは実数なので，$2x+y$ と $x+3y$ とは実数である．$(2x+y)+i(x+3y)=4-3i$ なので，定理 1.9.2 より，$2x+y=4$ かつ $x+3y=-3$．x と y とに関するこの連立方程式を解くと，$x=3$ かつ $y=-2$． 終

問題 1.9.1　実数 x と y とについて $(x-4y)+i(2x+3y)=17+i$ とします．このような実数 x,y を求めなさい．

例題　実数 a と b とについて $a(5+2i)+b(4-3i)=1-18i$ とする．このような実数 a,b を求める．

〔解説〕 まず等式の左辺 $a(5+2i)+b(4-3i)$ を整理する：
$$a(5+2i)+b(4-3i)=5a+2ai+4b-3bi=5a+4b+i(2a-3b)\ .$$
a と b とは実数なので，$5a+4b$ と $2a-3b$ とは実数である．$5a+4b+i(2a-3b)=1-18i$ なので，定理 1.9.2 より，$5a+4b=1$ かつ $2a-3b=-18$．a と b とに関するこの連立方程式を解くと，$a=-3$ かつ $b=4$． 終

問題 1.9.2　実数 a と b とについて $a(3+4i)-b(5-2i)=19+8i$ とします．このような実数 a,b を求めなさい．

複素数は $a+ib$（a,b とは実数）の形で表せます．ここで $b=0$ のとき，$a+ib=a+i\cdot 0=a$ は実数です．かたや，$b\neq 0$ のときは，$a+ib$ は実数でない複素数つまり虚数になります．

定理 1.9.3　実数 a と b とについて，
$$\text{複素数 } a+ib \text{ が実数である} \iff b=0\ ,$$
$$\text{複素数 } a+ib \text{ が虚数である} \iff \text{複素数 } a+ib \text{ が実数でない} \iff b\neq 0\ .$$

例題　実数を表す変数 x について，複素数 $(3-2i)(x+4i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表す．
$$(3-2i)(x+4i)=3x+12i-2xi-8\cdot(-1)=3x+8+i(12-2x)\ .$$
$3x+8$ と $12-2x$ とは実数なので，複素数 $(3-2i)(x+4i)$ が実数である条件は，$12-2x=0$，つまり $x=6$． 終

問題 1.9.3　実数を表す変数 x について，複素数 $(4-3i)(x+6i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表しなさい．

例題　実数を表す変数 x について，複素数 $(2+3i)(x-6i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表す．
$$(2+3i)(x-6i)=2x-12i+3xi+18=2x+18+i(3x-12)\ .$$
$2x+18$ と $3x-12$ とは実数なので，複素数 $(2+3i)(x-6i)$ が虚数である条件は，$3x-12\neq 0$，つまり $x\neq 4$． 終

問題 1.9.4　実数を表す変数 x について，複素数 $(3-4i)(x+8i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表しなさい．

なお，虚数については大小関係を考えません[8]．ですから，不等式の右辺及び左辺の数は実数に限ります．

――― 定理の証明

定理 1.9.1　実数 a と b とについて，
$$a+ib=0 \iff a=b=0\ .$$

証明　$a=b=0$ ならば $a+bi=0+0i=0$．

$a+ib=0$ と仮定する．$a=-ib$ なので，$a^2=(-ib)^2$，この等式の右辺は $(-ib)^2=i^2b^2=-b^2$ なので
$$a^2=-b^2\ .$$
a,b は実数なので，定理 1.5.10 より，$a^2\geq 0$，$b^2\geq 0$ なので $-b^2\leq 0$．定理 1.5.4 より
$$a^2=-b^2=0\ .$$
従って定理 1.1.2 より $a=b=0$．（証明終り）

定理 1.9.2　実数 a,b,c,d について，
$$a+ib=c+id \iff a=c \text{ かつ } b=d\ .$$

証明　定理 1.9.1 より，
$$a+ib=c+id \iff a-c+i(b-d)=0 \iff a-c=0 \text{ かつ } b-d=0 \iff a=c \text{ かつ } b=d\ .$$

定理 1.9.3　実数 a と b とについて，
$$\text{複素数 } a+ib \text{ が実数である} \iff b=0\ .$$

証明　複素数 $a+ib$ が実数であるとする．$c=a+ib$ とおく．$a+bi=c+0i$ で a,b,c は実数なので，定理 1.9.2 より $b=0$．

逆に $b=0$ ならば $a+ib=a$ は実数である．（証明終り）

---

[8] 仮に虚数についても実数と同じような大小関係があるとすると，定理 1.5.10 の証明と同様に推論すると，虚数単位 i について $i^2\geq 0$；しかし $i^2=-1<0$ なので，矛盾が生じます．故に，虚数については実数と同じようには大小関係を考えません．