§1.8　複素数

2 の平方根は有理数の中にはありませんでした． そこで，2 の平方根の一つを $\sqrt{2}$ と表して新しい数（有理数でない数）を作りました． 同じようなことを -1 について考えます． -1 の平方根は実数の中にありません [5]． そこで，-1 の平方根の一つを $\sqrt{-1}$ または i と表して新しい数（実数でない数）を作ります． この数 i を**虚数単位**といいます． 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ は -1 の平方根ですから

$$i^2 = -1 \ .$$

有理数に加えて例えば無理数 $\sqrt{2}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-\sqrt{2}\ ,\quad 7\sqrt{2}\ ,\quad \frac{9}{4}+3\sqrt{2}\ ,\quad \frac{7-5\sqrt{2}}{4}\ ,\quad \frac{5\sqrt{2}-8}{6+\sqrt{2}}$$

などの数ができます． このことと同様に，実数に加えて虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-i\ ,\quad 7i\ ,\quad \frac{9}{4}+3i\ ,\quad \frac{7-5i}{4}\ ,\quad \frac{5i-8}{6+i}$$

などの数ができます． 更には，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ なども実数ですから，

$$2\sqrt{3}+4i\ ,\quad \frac{5-3\sqrt{2}\,i}{8}\ ,\quad \frac{4+\sqrt{3}\,i}{7i-\sqrt{5}}$$

などの数もできます． このようにしてできる数を**複素数** (complex number) といいます． つまり，複素数とは，実数と虚数単位 i とから何回か四則演算を行ってできる数のことです．

正確に述べます． 複素数の全体 $\mathbf{C}$ は以下の3条件を満たす必要最小限の集合です：

(1)　総ての実数は集合 $\mathbf{C}$ に属す；

(2)　虚数単位 i は集合 $\mathbf{C}$ に属す；

(3)　集合 $\mathbf{C}$ の要素の和・差・積・商（0 で割る商は除く）はやはり $\mathbf{C}$ の要素であり，集合 $\mathbf{C}$ の要素について四則演算の法則が成り立つ：つまり，$\mathbf{C}$ の任意の要素 α,β,γ について，

（加法の交換法則）　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

（乗法の交換法則）　$\alpha\beta=\beta\alpha$;

（加法の結合法則）　$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$;

（乗法の結合法則）　$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$;

$$0+\alpha=\alpha+0=\alpha\ ;$$
$$1\cdot\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha\ ;$$
$$-\alpha+\alpha=\alpha+(-\alpha)=0\ ;$$
$$\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1 \quad (\text{但し}\ \alpha\neq 0\ )\ ;$$

（分配法則）　$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$,　$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.

このようにして，実数の範囲より広い複素数の範囲を考えます． 実数でない複素数を虚数 (imaginary number) といいます． 数について次のように分類できます：

$$\text{複素数}\begin{cases}\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\\ \text{有理数でない実数} = \text{無理数}\end{cases}\\ \text{実数でない複素数} = \text{虚数}\end{cases}.$$

複素数の定義より，複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数であり，複素数の範囲で，四則演算の法則（法則1.1）から導かれる性質は総て成り立ちます． 例えば，複素数についても乗法公式や指数法則が成り立ちます． ですから，虚数単位 i をあたかも文字のように扱うと，複素数についても実数のときと同じように四則演算及び冪が計算できます． 但し，$i^2=-1$ ですから，i^2 は -1 で置き換えます．

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができます． 例えば，$x=\sqrt{3}\,i$ とすると

$$x^2 = \left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \sqrt{3}^{\,2} i^2 = 3\cdot(-1) = -3\ .$$

よって $x=\sqrt{3}\,i$ は -3 の平方根です． 一般に，実数 b について $b>0$ のとき，定理1.6.2より $\sqrt{b}^{\,2}=b$ なので，

$$\left(\sqrt{b}\,i\right)^2 = \sqrt{b}^{\,2} i^2 = b\cdot(-1) = -b\ .$$

ここで $-b=a$ とおきます． $b>0$ なので $a<0$ ，つまり a は負の実数です． $b=-a>0$ なので，

$$\left(\sqrt{-a}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{b}\,i\right)^2 = -b = a\ ;$$

このように，$\sqrt{-a}\,i$ の 2 乗は a になるので，$\sqrt{-a}\,i$ は a の平方根です．

定理 1.8.1　実数 a について $a<0$ のとき，虚数 $i\sqrt{-a}$ は a の平方根である．

そこで，負の実数 a の平方根 $i\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}$ と表記します．

定義　実数 a について $a<0$ のとき，$\sqrt{a}$ を次のように定義する：$\sqrt{a}=i\sqrt{-a}$.

例えば，

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-(-5)}\,i = \sqrt{5}\,i\ ,\qquad \sqrt{-9} = \sqrt{-(-9)}\,i = \sqrt{9}\,i = 3i\ .$$

こうして，実数 a について，$a\geq 0$ のときも $a<0$ のときも $\sqrt{a}$ の値が定義されました． 但し $a<0$ のときは $\sqrt{a}$ は虚数になります．

定理 1.8.2　任意の実数 a について $\sqrt{a}^{\,2}=a$.

証明　$a\geq 0$ の場合と $a<0$ の場合に分けて扱う．

$a\geq 0$ のとき，定理1.6.2より $\sqrt{a}^{\,2}=a$.

$a<0$ のとき，定理1.8.1より，虚数 $\sqrt{a}=i\sqrt{-a}$ は a の平方根なので $\sqrt{a}^{\,2}=a$.

このように，$a\geq 0$ のときも $a<0$ のときも $\sqrt{a}^{\,2}=a$.　（証明終り）

任意の実数 a について，定理1.3.1と定理1.8.2とより $\left(-\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a}^{\,2}=a$ なので，a の平方根は $\pm\sqrt{a}$ です．

例題　$-\dfrac{11}{75}$ の平方根をなるべく簡単に表す．

$$\sqrt{-\frac{11}{75}} = \sqrt{\frac{11}{75}}\,i = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3\cdot 5^2}}\,i = \frac{\sqrt{11}\sqrt{3}}{3\cdot 5}\,i = \frac{\sqrt{33}}{15}\,i\ .$$

$-\dfrac{11}{75}$ の平方根は $\pm\dfrac{\sqrt{33}}{15}i$ である．　終

問題 1.8.1　$-\dfrac{13}{98}$ の平方根をなるべく簡単に表しなさい． 根号が現れる回数はなるべく少なくして，根号の中は自然数にしなさい．

複素数の四則演算の計算をします．

例解　複素数 $\alpha=5-2i$ と $\beta=3+4i$ とに対して，和 $\alpha+\beta$, 差 $\alpha-\beta$, 積 $\alpha\beta$ を計算します． 虚数単位 i をあたかも文字のように扱って計算します．

$$\alpha+\beta = 5-2i+3+4i = (5+3)+(-2+4)i = 8+2i\ .$$
$$\alpha-\beta = 5-2i-(3+4i) = 5-2i-3-4i = (5-3)+(-2-4)i = 2-6i\ .$$

$i^2=-1$ ですから，

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (5-2i)(3+4i) = 5(3+4i)-2i(3+4i)\\ &= 15+20i-6i-8i^2 = 15+14i-8(-1)\\ &= 23+14i\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.8.2　複素数 $\alpha=-4+5i$ と $\beta=-3-2i$ とに対して，和 $\alpha+\beta$, 差 $\alpha-\beta$, 積 $\alpha\beta$ を計算しなさい．

複素数 α の中の虚数単位 i を総て $-i$ で置き換えてできる複素数を，α の**共役複素数**といいます． 例えば，複素数 $2+3i$ の共役複素数は $2+3(-i)=2-3i$ で，複素数 $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}i$ の共役複素数は $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}(-i)=-\dfrac{9}{2}+\sqrt{5}i$ です． $7=7+0i$ ですから，7 の共役複素数は $7+0(-i)=7$ です；つまり，実数 7 の共役複素数は 7 自身です． また，虚数単位 $5i$ の共役複素数は $5(-i)=-5i$ で，複素数 $-\dfrac{8}{3}i$ の共役複素数は $-\dfrac{8}{3}(-i)=\dfrac{8}{3}i$ です． 一般的に，実数 a と b とに対して，複素数 $a+ib$ の共役複素数は $a+(-i)b=a-ib$ で，複素数 $a-ib$ の共役複素数は $a-(-i)b=a+ib$ です．

実数 a と b とに対して，複素数 $a+bi$ とその共役複素数 $a-bi$ との積は実数になります：乗法公式 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ と指数法則と $i^2=-1$ とより，

$$(a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2-b^2(-1) = a^2+b^2\ .$$

a と b とは実数ですから，a^2+b^2 は実数です．

分数の分母が虚数であるとき，分母の共役複素数を分母と分子とに掛けて計算します．

例解　複素数 $\alpha=5-2i$ と $\beta=3+4i$ とに対して，商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $\dfrac{\beta}{\alpha}$ とを計算します． $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を計算するためには，分母 $\beta=3+4i$ の共役複素数 $3-4i$ を分子と分母に掛けます．

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{5-2i}{3+4i} = \frac{(5-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{5(3-4i)-2i(3-4i)}{3^2-(4i)^2}\\ &= \frac{15-20i-6i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{15-26i+8(-1)}{9-16(-1)}\\ &= \frac{7-26i}{25}\ .\end{aligned}$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を計算するためには，分母 $\alpha=5-2i$ の共役複素数 $5+2i$ を分子と分母とに掛けます．

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{3+4i}{5-2i} = \frac{(3+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{3(5+2i)+4i(5+2i)}{5^2-(2i)^2}\\ &= \frac{15+6i+20i+8i^2}{25-4i^2} = \frac{15+26i+8(-1)}{25-4(-1)}\\ &= \frac{7+26i}{29}\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.8.3　複素数 $\alpha=3-2i$ と $\beta=-4+5i$ とに対して，商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $\dfrac{\beta}{\alpha}$ とを計算しなさい．

指数法則 $a^{m+n}=a^m a^n$, $a^{mn}=(a^m)^n$ を用いると次の等式が導かれます：

$$i^3 = i^{2+1} = i^2 i^1 = -1\cdot i = -i\ ;$$
$$i^4 = i^{2\cdot 2} = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1\ .$$

これらの等式は覚えておいて下さい：

$$i^2 = -1\ ,\qquad i^3 = -i\ ,\qquad i^4 = 1\ .$$

例題　複素数 $(2-3i)^3$ を計算する．

乗法公式 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ を用いる．

$$\begin{aligned}(2-3i)^3 &= 2^3-3\cdot 2^2 3i+3\cdot 2\cdot(3i)^2-(3i)^3\\ &= 8-36i+54i^2-27i^3 = 8-36i-54+27i\\ &= -46-9i\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.8.4　複素数 $(3-2i)^3$ を計算しなさい．

———— 虚数を考える理由

— $i^2=-1$ となるような数 i を勝手に創っていいのでしょうか．

もともと“数”というのは人間が勝手に考えたものです．

例えば，数の“3”という物体がこの世の中に実在するわけではありません． 実在するのは，例えば，3 人の人間であったり，3 冊の本であったり，3 匹のこぶたであったりするわけです． それらをみて個数だけを抽象すると“3”という概念が生まれます． “3”という実体が存在するわけではありません．

また例えば，羊羹の固まりが 1 個あって，それを 2 等分すると，2 等分した片方の量は元々の量の $\dfrac{1}{2}$ です． しかし，即物的には，1 個の羊羹の固まりを 2 等分すると 2 個の羊羹の固まりになるだけです． 何かの実体を指して“これが $\dfrac{1}{2}$ だ”というわけにはいきません． $\dfrac{1}{2}$ というのは人間が勝手に考えたことです．

このように，もともと数とは自然を解釈するために人間が勝手に創った概念です． ですから，$i^2=-1$ となる数 i を考えることが自然を解釈するのに役立つのであれば，そのような数 i を勝手に創ったところで驚くにはあたりません． 本当に $i^2=-1$ となる数 i があるのかという疑問は，本当に $\dfrac{1}{2}$ という数があるのかという疑問と同じようなものです [6]． 問題にすべきは，虚数単位 i を創ることが科学において役に立つかどうかということです． 結果的にいうと，虚数単位 i を導入することは科学に大きな実りをもたらします． 例えば，量子力学の基本になる方程式には虚数単位 i が現れます． また例えば電気回路における計算でも虚数単位が使われます [7]．

---

[5] 定理1.5.10より，どんな実数 x についても $x^2\geq 0$ ですから，$x^2=-1$ となる実数 x はありません． ですから -1 の平方根は実数の中にはありません．

[6] この辺りは筆者の個人的な考えです．

[7] 電気回路を考えるときは虚数単位を j で表します．