§1.3　乗法公式

記号“＋”と“−”とを上下にくっつけた記号“±”及び“∓”を用います．これら２個の記号を複号と言います．　例えば，等式　$a(b+c)=ab+ac$　と等式　$a(b-c)=ab-ac$　とを併せて次のように表現します：

$$a(b\pm c)=ab\pm ac \qquad \text{（複号同順）}.$$

また例えば，等式　$-(a+b)=-a-b$　と等式　$-(a-b)=-a+b$　とを併せて次のように表現します：

$$-(a\pm b)=-a\mp b \qquad \text{（複号同順）}.$$

このように，複号同順の式は，複号 $\pm, \mp$ において上側の記号ばかりを選んだ式と下側の記号ばかりを選んだ式との両方を表します．

a, b, c, d, x は数を表します．　四則演算の法則を用いて公式を導きます．

式 $(a+b)^2$ と $(a-b)^2$ とを展開します．

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)=a^2+ab+ab+b^2\\&=a^2+2ab+b^2\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2&=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)=a^2-ab-ab+b^2\\&=a^2-2ab+b^2\ .\end{aligned}$$

こうして次の公式が導かれました：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　（複号同順）．

式 $(ax+b)(cx+d)$ を展開します．

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d)&=ax(cx+d)+b(cx+d)=acx^2+adx+bcx+bd\\&=acx^2+(ad+bc)x+bd\ .\end{aligned}$$

こうして次の公式が導かれました：$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ ．

分配法則より，以下のような等式が成り立ちます：

$$A(B+C+D)=AB+AC+AD\ , \qquad (A+B+C)D=AD+BD+CD\ .$$

式 $(a+b+c)^2$ を展開します．

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)\\&=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\ .\end{aligned}$$

こうして次の公式が導かれました：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ．

式 $(a+b)^3$ を展開します．

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\ .\end{aligned}$$

同様に，式 $(a-b)^3$ を展開すると次のようになります：

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\ .$$

これら２つの公式を併せます：$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$　（複号同順）．

$\boxed{\text{問題 1.3.1}}$　公式 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ を導きなさい．

式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開します．

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2)&=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\&=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\&=a^3+b^3\ .\end{aligned}$$

同様に，式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を展開すると次のようになります：

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\ .$$

これら２つの公式を併せます：$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$　（複号同順）．

$\boxed{\text{問題 1.3.2}}$　公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ を導きなさい．

このようにして，四則演算の法則より，**乗法公式**と呼ばれる公式が導かれます．

定理（乗法公式）　任意の数 a, b, c, d, x について以下の等式が成り立つ：

$$\begin{gathered}(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \qquad \text{（複号同順）};\\(a+b)(a-b)=a^2-b^2\ ;\\(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab\ ;\\(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd\ ;\\(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\ ;\\(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3 \qquad \text{（複号同順）};\\(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3 \qquad \text{（複号同順）}.\end{gathered}$$

定理 1.3.1　任意の数 a について $(-a)^2=a^2$ ．

証明　乗法公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ において $b=-a$ とする：

$$a^2-(-a)^2=\{a+(-a)\}\{a-(-a)\}=(a-a)(a+a)=0\cdot 2a=0\ .$$

つまり $a^2-(-a)^2=0$ ，従って $a^2=(-a)^2$ ．　　（証明終り）

定理 1.3.2　数 a と b とについて

$$a^2=b^2 \iff a=\pm b\ .$$

証明　乗法公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ より，

$$a^2=b^2 \iff a^2-b^2=0 \iff (a+b)(a-b)=0\ .$$

定理 1.1.1 より

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)=0 &\iff a+b=0 \ \text{または}\ a-b=0\\&\iff a=-b \ \text{または}\ a=b\ .\end{aligned}$$

故に

$$a^2=b^2 \iff a=\pm b\ .$$

（証明終り）