

§0.5 述語の同値性

述語 P と述語 Q について、 P と Q とが**同値である** (equivalent) とは、

P から Q が導かれ、逆に Q から P が導かれる

ことです。述語 P と述語 Q とが同値であることを次のように書き表します：

$$P \iff Q.$$

例 変数 x に関する述語 $x-3=0$ から、 x に関する述語 $x=3$ が導かれます。逆に、 $x=3$ のとき $x-3=0$ ですから、述語 $x=3$ から述語 $x-3=0$ が導かれます。従って述語 $x-3=0$ と述語 $x=3$ とは同値です：

$$x-3=0 \iff x=3.$$

終

例 整数を表す変数 n に関する述語 “ n は 6 の倍数である” と “ n は 2 と 3 との公倍数である” とは同値です：

$$n \text{ は } 6 \text{ の倍数である} \iff n \text{ は } 2 \text{ と } 3 \text{ との公倍数である}.$$

終

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について考えます。辺 AB の長さ \overline{AB} と辺 AC の長さ \overline{AC} とが等しいとすると、角度 $\angle ABC$ と角度 $\angle ACB$ とが等しいことが証明できます；つまり述語 $\overline{AB} = \overline{AC}$ から述語 $\angle ABC = \angle ACB$ が導かれます。逆に、 $\angle ABC$ と $\angle ACB$ とが等しいとすると、 \overline{AB} と \overline{AC} とが等しいことが証明できます；つまり述語 $\angle ABC = \angle ACB$ から述語 $\overline{AB} = \overline{AC}$ が導かれます。従って、述語 $\overline{AB} = \overline{AC}$ と述語 $\angle ABC = \angle ACB$ とは同値です：

$$\overline{AB} = \overline{AC} \iff \angle ABC = \angle ACB.$$

終