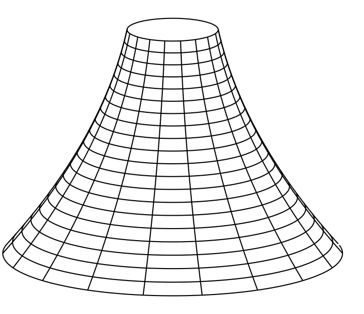
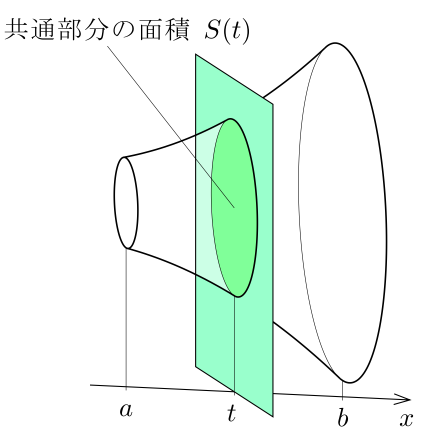
# §8.4　立体図形の体積



例として，右図のような立体図形 $V$ （中も詰まっている）の体積を求めることを考える．話を分かり易すくするためにこの立体 $V$ は回転体であるとする．

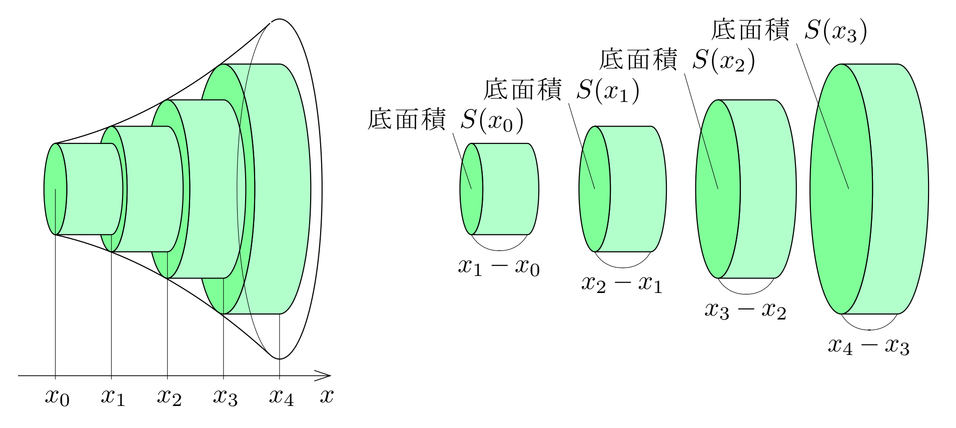
回転体 $V$ に対して，右下の図のように，$V$ の中心軸と平行になるように $x$ 座標軸を設定する．回転体 $V$ に属す点の $x$ 座標うち，最小値を $a$ とおき，最大値を $b$ とおく．更に，区間 $[a,b]$ の各実数 $t$ に対して，$x$ 軸の座標 $t$ の点を含み $x$ 軸に垂直な平面と立体 $V$ との共通部分である平面図形の面積を $S(t)$ とおく．この関数 $S$ は $a$ から $b$ まで積分可能であるとする．




回転体 $V$ を直円柱の形の円盤を重ねた立体で近似する．

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ をとる．そして，次の図のように，4 枚の円盤を重ねた立体で立体 $V$ を近似する．




このとき，4 枚の円盤の体積の合計 $W_4$ は

$$\begin{aligned} W_4 &= S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \\ &= \sum_{k=1}^{4} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ . \end{aligned}$$

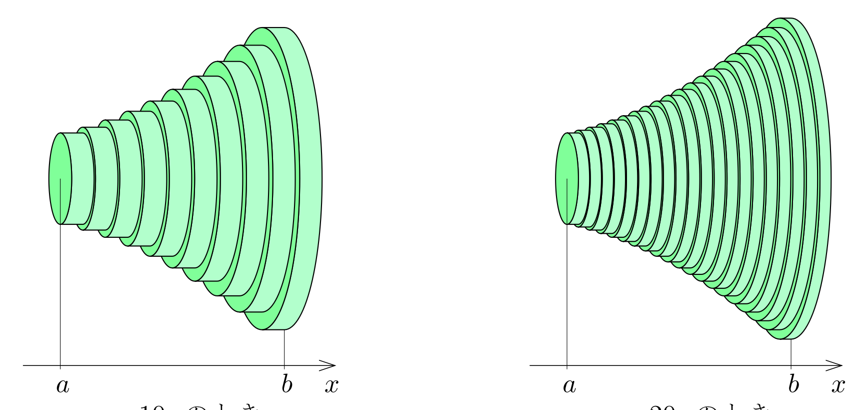
円盤の枚数を $n$ とおく．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．下図のように，$n$ 枚の円盤を重ねた立体で回転体 $V$ を近似する．




$n = 10$ のとき　　$n = 20$ のとき

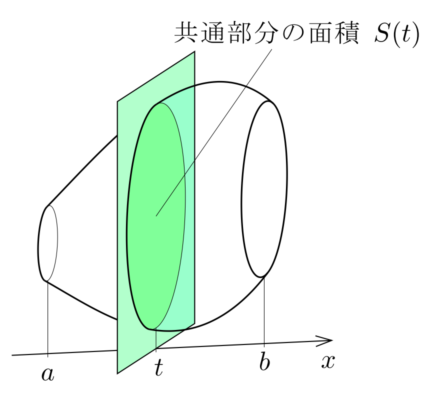
このとき，$V$ の体積の近似値，つまり $n$ 枚の円盤の体積の合計 $W_n$ は

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

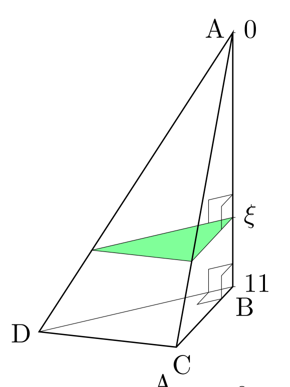
これは関数 $S$ のリーマン和である．円盤の枚数 $n$ を大きくして 1 枚 1 枚の円盤を薄くしていくと近似の精度が高くなる．なので，$W_n$ の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} W_n$ が $V$ の正確な体積になる．$W_n$ は関数 $S$ のリーマン和なので $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \int_a^b S(x)\,dx$ ．従って，関数 $S$ の定積分 $\int_a^b S(x)\,dx$ が回転体 $V$ の体積になる．

回転体に限らず立体について一般的に次の定理が成り立つ．

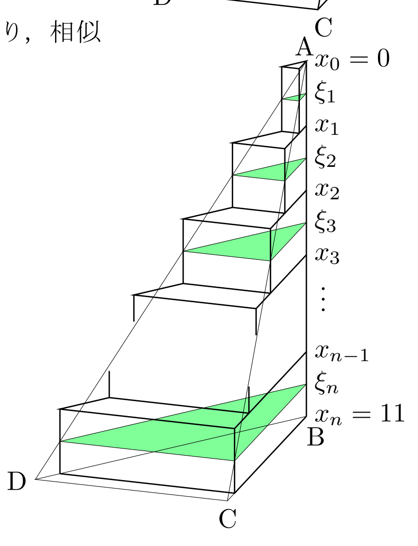
**定理** 8.4　立体 $V$ に対して $x$ 座標軸が設定されているとする．$V$ に属す点の $x$ 座標のうち，最小値を $a$ と，最大値を $b$ とおく．区間 $[a,b]$ の各実数 $t$ に対して，$x$ 軸の座標 $t$ の点を含み $x$ 軸に垂直な平面と $V$ との共通部分の面積を $S(t)$ とおく；この関数 $S$ は $a$ から $b$ まで積分可能であるとする．このとき，立体 $V$ の体積は $\int_a^b S(t)\,dt$ である．



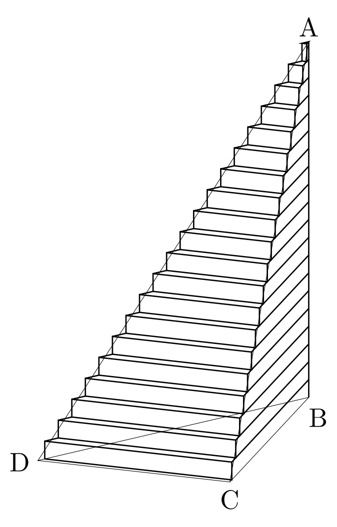

$\boxed{\text{問題 8.4.1}}$　空間内の 4 点 A, B, C, D を頂点とする三角錐 ABCD において，角 ABC, ABD, CBD は直角であるとする．$\overline{\mathrm{AB}} = 11$ ，$\overline{\mathrm{BC}} = 5$ ，$\overline{\mathrm{BD}} = 8$ とする．この三角錐の体積を考える．直角三角形 BCD を底面とする．頂点 A を原点とし，頂点 A から頂点 B への向きに座標軸をとる．この座標軸上で座標が $\xi$ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 ABCD との共通部分（右図の明緑色の部分）と直角三角形 BCD とは相似であり，相似比は $\xi : 11$ で，面積の比は $\xi^2 : 11^2$ である．




(1)　座標が $\xi$ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 ABCD との共通部分の面積を求めよ．



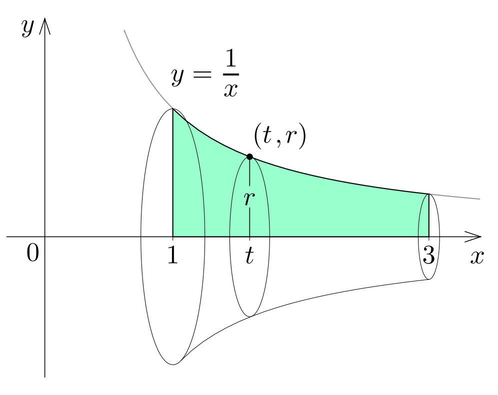

(2)　変数 $n$ を正の自然数とする．$0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のように三角錐 ABCD を $n$ 個の直三角柱（側面は底面及び上面と垂直）を併せた立体で近似する：この体積 $S_n$ を表す式を記せ．またこの式を何というか記せ．




(3)　$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に近づくとする．$n \to \infty$ のとき薄い三角柱を併せた立体の体積 $S_n$ は右図のように三角錐 ABCD の体積に限りなく近づく；つまり $S_n$ の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が三角錐 ABCD の体積になる．このことを用いて，定積分によって三角錐 ABCD の体積を求めよ．

$\boxed{\text{例題}}$　$xy$ 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を $x$ 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．

〔解説〕 与えられた回転体を $V$ とおく．区間 $[1,3]$ の各実数 $t$ に対して，$x$ 軸の座標 $t$ の点を含み $x$ 軸に垂直な平面と $V$ をとの共通部分は円である； その半径を $r$ とおくと，$xy$ 座標平面において点 $(t,r)$ は $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフに属すので，$r = \dfrac{1}{t}$ ；よって，共通部分の面積 $S(t)$ は




$$S(t) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{\pi}{t^2} \ .$$

従って，回転体 $V$ の体積は，

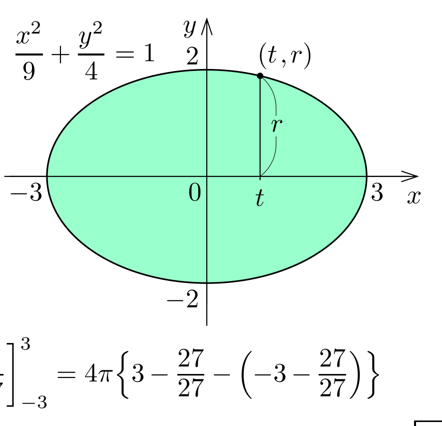
$$\begin{aligned} \int_1^3 S(t)\,dt &= \int_1^3 \frac{\pi}{t^2}\,dt = \pi\int_1^3 t^{-2}dt = \pi\left[-t^{-1}\right]_1^3 = -\pi\left[\frac{1}{t}\right]_1^3 = -\pi\left(\frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 8.4.2}}$　$xy$ 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を $x$ 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ．

$\boxed{\text{例題}}$　$xy$ 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を，3 次元空間において $x$ 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．

〔解説〕 $xy$ 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を $x$ 軸を中心に回転させてできる回転体を $V$ とおく．$1 - \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{y^2}{4} \geq 0$ なので $-3 \leq x \leq 3$ ．区間 $[-3,3]$ の各実数 $t$ に対して，$x$ 軸の座標 $t$ の点を含み $x$ 軸に垂直な平面と $V$ との共通部分は円である；その半径を $r$ とおくと，$xy$ 座標平面において点 $(t,r)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に属すので $\dfrac{t^2}{9} + \dfrac{r^2}{4} = 1$ ，よって




$$r^2 = 4\left(1 - \frac{t^2}{9}\right) \ ;$$

共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = 4\pi\left(1 - \frac{t^2}{9}\right) \ .$$

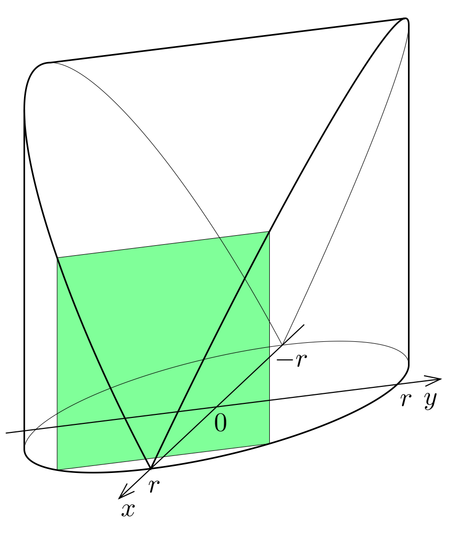
故に回転体 $V$ の体積は，

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(t)\,dt &= \int_{-3}^3 4\pi\left(1 - \frac{t^2}{9}\right)dt = 4\pi\left[t - \frac{t^3}{27}\right]_{-3}^3 = 4\pi\left\{3 - \frac{27}{27} - \left(-3 - \frac{27}{27}\right)\right\} \\ &= 16\pi \ . \end{aligned}$$

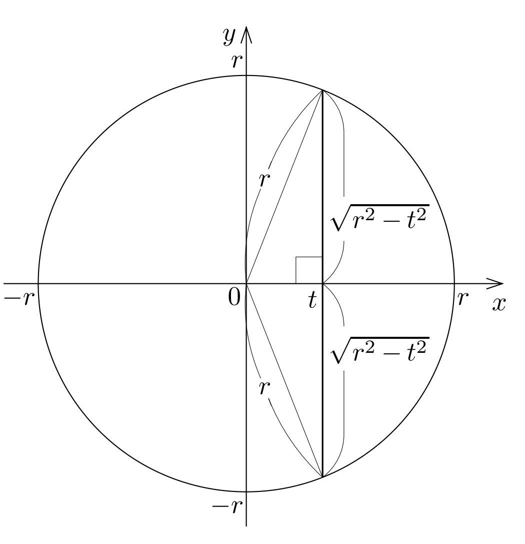
$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 8.4.3}}$　$xy$ 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を，3 次元空間において $y$ 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ．

$\boxed{\text{例題}}$　立体図形 $V$ の底面は半径が $r$ である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 $V$ との共通部分は底辺が $V$ の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域であるとする．この立体図形 $V$ の体積を求める．




〔解説〕　立体図形 $V$ の底面を含む平面において底面の円の中心のを原点とする $xy$ 座標系をおく．$x$ 軸に垂直な各平面と立体 $V$ との共通部分が正方形であるとする．$V$ に属す点の $x$ 座標の範囲は $-r \leq x \leq r$ ．$-r \leq t \leq r$ である各実数 $t$ に対して，$x$ 軸の座標が $t$ である点が属し $x$ 軸に水垂直な平面と立体 $V$ との共通部分の正方形の底辺を $xy$ 座標平面で図示すると右図のようになる．正方形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2 - t^2}$ なので，正方形の面積は



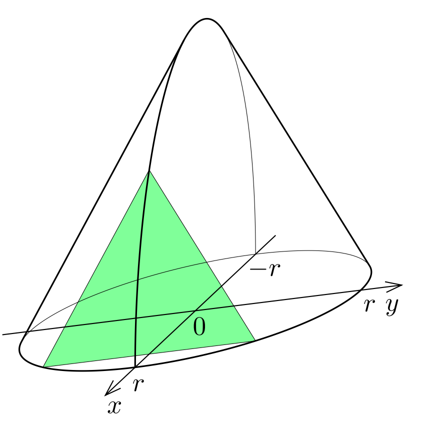

$$\left(2\sqrt{r^2 - t^2}\right)^2 = 4(r^2 - t^2) \ .$$

$V$ の体積は

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r 4(r^2 - t^2)\,dt &= 4\left[r^2 t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-r}^r \\ &= \frac{16}{3}r^3 \ . \end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 8.4.4}}$　立体図形 $V$ の底面は半径が $r$ である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 $V$ との共通部分は底辺が $V$ の底面の円の弦である正三角形で囲まれる平面領域である．この立体図形 $V$ の体積を求めよ．




$\boxed{\text{問題 8.4.5}}$　$xy$ 座標平面の上に載っている立体図形 $V$ がある．$V$ の底面は $xy$ 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $0 \leq y \leq \sin x$ との連立で表される平面領域である．$x$ 軸に垂直で $x$ 軸との共有点の $x$ 座標が 0 以上 $\pi$ 以下である各平面と $V$ との共通部分は半円で囲まれる平面領域であり，その半円の直径である線分の一方の端点は $x$ 軸に属しもう一方の端点は $y = \sin x$ のグラフに属す．この立体図形 $V$ の体積を求めよ．