§7.4　部分積分法

関数の積の微分公式（定理3.3.1）より次の定理が導かれる．

> **定理**（不定積分の部分積分法）　関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間において，
>
> $$G(x)=\int g(x)\,dx \quad \text{とおくと} \quad \int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x)-\int f'(x)\,G(x)\,dx\ .$$
>
> ここで不定積分 $\int g(x)\,dx$ の計算では積分定数を略してよい．

証明　関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える． g の不定積分を G とおく： $G(x)=\int g(x)\,dx$ ． 定理6.4.3より $\dfrac{d}{dx}G(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\}=g(x)$ ．
関数の積の微分公式（定理3.3.1）より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x)+f(x)\,\frac{d}{dx}G(x)=f'(x)\,G(x)+f(x)\,g(x)\ ,$$

$$f(x)\,g(x)=\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}-f'(x)\,G(x)\ ,$$

$$\begin{aligned}\int f(x)\,g(x)\,dx &= \int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}-f'(x)\,G(x)\right]dx\\ &= \int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}\right]dx-\int f'(x)\,G(x)\,dx\ ,\end{aligned}$$

定理6.4.4より $\displaystyle\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}\right]dx=f(x)\,G(x)+C$ （ C は積分定数）なので，

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x)-\int f'(x)\,G(x)\,dx\ .$$

ここで積分定数は略した．　（証明終り）

この公式を用いる積分計算法を部分積分法という． この公式の成り立ちを覚えること： 関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続であるとき， $g(x)$ の不定積分 $\int g(x)\,dx=G(x)$ に対して，

そのまま　　微分する

$$\int \boxed{f(x)}\,\boxed{g(x)}\,dx = \boxed{f(x)}\,\boxed{G(x)}-\int \boxed{f'(x)}\,\boxed{G(x)}\,dx\ .$$

積分する　　そのまま

[例題]　不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する． 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する．
〔解説〕 積分定数を略すと $\int\cos x\,dx=\sin x$ ， また $\dfrac{d}{dx}x=1$ ． 積分定数を C_1 とおく． 部分積分法により，

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x-\int 1\sin x\,dx = x\sin x-\int\sin x\,dx\\ &= x\sin x+\cos x+C_1\ .\end{aligned}$$

更にこの結果を用いて $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する． 積分定数を略すと $\int\sin x\,dx=-\cos x$ ， また $\dfrac{d}{dx}x^2=2x$ ． 積分定数を C_2 とおく． 部分積分法により，

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= x^2(-\cos x)-\int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx\\ &= -x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C_2\\ &= 2x\sin x+(2-x^2)\cos x+C_2\ .\end{aligned}$$

[終]

[問題 7.4.1]　不定積分 $\int x\sin x\,dx$ を計算せよ． 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\cos x\,dx$ を計算せよ．

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする． 不定積分 $\int f(x)\,dx$ を計算するために， $f(x)=f(x)\cdot 1$ と考えて部分積分法の公式を適用する：積分定数を略すと $\int 1\,dx=x$ なので，

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\,1\,dx = f(x)\,x-\int f'(x)\,x\,dx = x\,f(x)-\int x\,f'(x)\,dx\ .$$

この部分積分法によって対数関数 $\ln x$ の積分公式が導く． 積分定数を略すと $\int 1\,dx=x$ ， また $\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x}$ ． 積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int\ln x\,dx &= \int(\ln x)\,1\,dx = (\ln x)\,x-\int\frac{1}{x}\,x\,dx = x\ln x-\int 1\,dx\\ &= x\ln x-x+C\ .\end{aligned}$$

> （積分公式）
>
> $$\int\ln x\,dx = x\ln x-x+C \quad （C\ は積分定数）．$$

[例題]　不定積分 $\int\ln(3y+2)\,dy$ を計算する．
〔解説〕 変数 z を $z=3y+2$ とおく． $\dfrac{dz}{dy}=3$ なので $dy=\dfrac{1}{3}\,dz$ ． 積分定数を C_0, C とおく． 部分積分法により，

$$\begin{aligned}\int\ln(3y+2)\,dy &= \int(\ln z)\,\frac{1}{3}\,dz = \frac{1}{3}(z\ln z-z)+C_0\\ &= \frac{1}{3}\{(3y+2)\ln(3y+2)-3y-2\}+C_0\\ &= \left(y+\frac{2}{3}\right)\ln(3y+2)-y-\frac{2}{3}+C_0\\ &= \left(y+\frac{2}{3}\right)\ln(3y+2)-y+C\ .\end{aligned}$$

ここで定数項 $-\dfrac{2}{3}+C_0$ を一つの積分定数 C にまとめた．　[終]

[問題 7.4.2]　不定積分 $\int\ln(4u+7)\,du$ を計算せよ．

[例題]　不定積分 $\int y\ln y\,dy$ を計算する．
〔解説〕 積分定数を略すと $\int y\,dy=\dfrac{1}{2}y^2$ ， また $\dfrac{d}{dy}\ln y=\dfrac{1}{y}$ ． 積分定数を C とおく． 部分積分法により，

$$\begin{aligned}\int y\ln y\,dy &= \frac{1}{2}y^2\ln y-\int\frac{1}{2}y^2\frac{1}{y}\,dy = \frac{y^2}{2}\ln y-\frac{1}{2}\int y\,dy = \frac{y^2}{2}\ln y-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}y^2+C\\ &= y^2\left(\frac{\ln y}{2}-\frac{1}{4}\right)+C\ .\end{aligned}$$

[終]

[問題 7.4.3]　不定積分 $\int x^3\ln x\,dx$ を計算せよ．

[例題]　不定積分 $\int x\sin 3x\,dx$ を計算する．
〔解説〕 変数 y を $y=3x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}\,dy$ ． 積分定数を略すと，

$$\int\sin 3x\,dx = \int\sin y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}(-\cos y) = -\frac{1}{3}\cos 3x\ ,$$

$$\int\cos 3x\,dx = \int\cos y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\sin y = \frac{1}{3}\sin 3x\ .$$

また $\dfrac{d}{dx}x=1$ ． 積分定数を C とおく． 部分積分法により，

$$\begin{aligned}\int x\sin 3x\,dx &= -\frac{1}{3}x\cos 3x-\left(-\frac{1}{3}\int 1\cdot\cos 3x\,dx\right)\\ &= -\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3x\,dx = -\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x+C\\ &= \frac{1}{9}\sin 3x-\frac{x}{3}\cos 3x+C\ .\end{aligned}$$

[終]

[問題 7.4.4]　不定積分 $\int x\cos 5x\,dx$ を計算せよ．

[問題 7.4.5]　不定積分 $\int xe^{\frac{x}{3}}\,dx$ を計算せよ．

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する．

[例題]　定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ を計算する．
〔解説〕 まず部分積分法によって不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する． 積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x-\int\sin x\,dx = x\sin x-(-\cos x)+C\\ &= x\sin x+\cos x+C\ .\end{aligned}$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx &= \Big[x\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-(0\sin 0+\cos 0)\\ &= \frac{\pi}{2}-1\ .\end{aligned}$$

[終]

[問題 7.4.6]　定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}t\sin t\,dt$ を計算せよ．

——— 定積分の部分積分法

定理（定積分の部分積分法）　実数 a, b が属する区間において，関数 f の導関数 f' 及び関数 g は連続であるとする．

$$G(x)=\int g(x)\,dx \quad \text{とおくと} \quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \Big[f(x)\,G(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx\ .$$

証明　関数 G を $G(x)=\int g(x)\,dx$ とおく． 定理 6.4.3 より $\dfrac{d}{dx}G(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\}=g(x)$ ． 関数の積の微分公式（定理3.3.1）より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x)+f(x)\,\frac{d}{dx}G(x) = f'(x)\,G(x)+f(x)\,g(x)\ .$$

関数 $f'(x)\,G(x)+f(x)\,g(x)$ は連続なので，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b\{f'(x)\,G(x)+f(x)\,g(x)\}\,dx = \Big[f(x)\,G(x)\Big]_a^b\ .$$

この等式の左辺は $\int_a^b\{f'(x)\,G(x)+f(x)\,g(x)\}\,dx = \int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx+\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ なので，

$$\int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx+\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \Big[f(x)\,G(x)\Big]_a^b\ ,$$

故に $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \Big[f(x)\,G(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx$ ．　（証明終り）