§6.8　定積分の性質

次の定理の証明は後にする．

定理 6.8.1　定数 k は変数 x と無関係とする． 関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，関数 $kf(x)$ も a から b まで積分可能であり，

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき， 関数 $f(x)+g(x)$ 及び $f(x)-g(x)$ も a から b まで積分可能であり，

$$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad （複号同順） \ .$$

例題　定積分 $\displaystyle\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx$ を計算する．

$$\begin{aligned}\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx &= \int_2^6\frac{x}{8}\,dx+\int_2^6\frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int_2^6 x\,dx+7\int_2^6\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^6+7\big[\ln|x|\big]_2^6 = \frac{1}{8}\,\frac{36-4}{2}+7(\ln 6-\ln 2) \\ &= 2+7\ln 3 \ .\end{aligned}$$

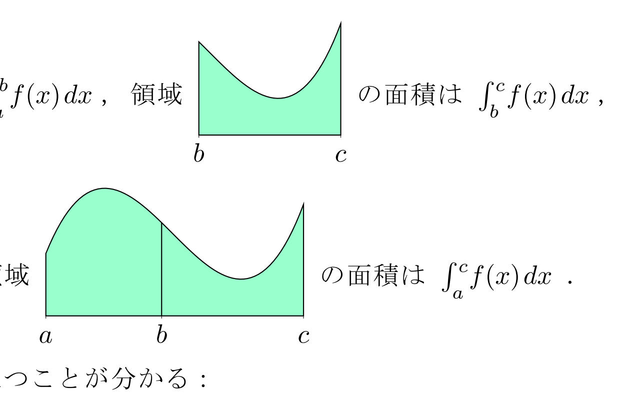
不定積分を計算してもよい． 積分定数を C とおく．

$$\int\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx = \int\frac{x}{8}\,dx+\int\frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int x\,dx+7\int\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{16}+7\ln|x|+C \ .$$

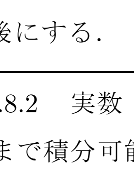
$$\begin{aligned}\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx &= \left[\frac{x^2}{16}+7\ln|x|\right]_2^6 = \frac{36}{16}+7\ln 6-\frac{4}{16}-7\ln 2 \\ &= \frac{9}{4}-\frac{1}{4}+7(\ln 6-\ln 2) \\ &= 2+7\ln 3 \ .\end{aligned}$$

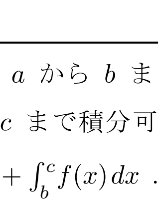
終

問題 6.8.1　定積分 $\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\frac{x-4\sin x}{3}\,dx$ を計算せよ．

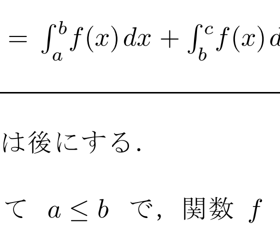


実数 a,b,c について $a\le b\le c$ とする． また，関数 f は a から c まで積分可能であり，区間 $[a,c]$ の各実数 x について $f(x)\ge 0$ とする． 右図のように，xy 座標平面において， $y=f(x)$ のグラフと直線 $x=a$ と $x=c$ と x 軸とで囲まれる領域を，直線 $x=b$ で仕切る． 6.1 節で述べたように次のことが成り立つ．

領域 

の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ ， 領域 

の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$ ，

この 2 個の領域を併せた領域 

の面積は $\int_a^c f(x)\,dx$ ．

このことから次の等式が成り立つことが分かる：

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

この等式は実数 a,b,c の大小関係に関わらず成り立つ． 次の定理が成り立つ． その証明は後にする．

定理 6.8.2　実数 a,b,c に対して，関数 f が a から b まで積分可能でかつ b から c まで積分可能であるとき， f は a から c まで積分可能であり，

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx \ .$$

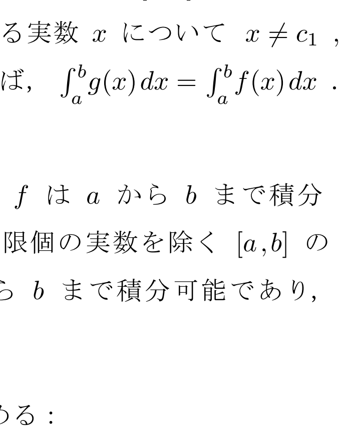
次の定理が成り立つ． その証明は後にする．

定理 6.8.3　実数 a と b とについて $a\le b$ で，関数 f と g とは a から b まで積分可能であるとする． 区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\le g(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

例　関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & （\ x\ne 1\ かつ\ x\ne 2\ のとき） \\ 2 & （\ x=1\ のとき） \\ 3 & （\ x=2\ のとき）\end{cases} \ .$$



$x=1$ のときと $x=2$ のときだけ $f(x)\ne x^2$ で，それ以外のときは $f(x)=x^2$ ． このとき，定積分 $\int_0^3 f(x)\,dx$ と $\int_0^3 x^2\,dx$ とは等しい：

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}3^3-0 = 9 \ .$$

終

一般的にいうと次のようになる：関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数 $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n$ を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば，つまり， $a\le x\le b$ である実数 x について $x\ne c_1$ ， $x\ne c_2$ ， $x\ne c_3$ ， $\cdots$ ， $x\ne c_n$ のとき $g(x)=f(x)$ ならば， $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ． 次の定理が成り立つ． その証明は省く．

定理 6.8.4　実数 a と b とについて $a\le b$ で，関数 f は a から b まで積分可能であるとする． 関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば， g は a から b まで積分可能であり， $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ．

例題　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & （\ x\ne 2\ のとき） \\ 5 & （\ x=2\ のとき）\end{cases} \ .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x)\,dx$ を計算する．

$0\le x\le 4$ である各実数 x について $x\ne 2$ のとき $g(x)=3^x$ なので， $\int_0^4 g(x)\,dx = \int_0^4 3^x\,dx$ ． $\int_0^4 3^x\,dx$ を計算する：

$$\int_0^4 3^x\,dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^4 = \frac{3^4-1}{\ln 3} = \frac{80}{\ln 3} \ .$$

故に $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,dx = \frac{80}{\ln 3}$ ．

終

問題 6.8.2　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x^2+6} & （\ x\ne 2\ のとき） \\ 7 & （\ x=2\ のとき）\end{cases} \ .$$

定積分 $\int_1^3 g(x)\,dx$ を計算せよ．

例題　関数 f について， $3<x<7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする． 定積分 $\int_3^7 f(x)\,dx$ を計算する．

$3\le x\le 7$ である各実数 x について， $x\ne 3$ ， $x\ne 7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x}$ なので， $\displaystyle\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7\frac{1}{x}\,dx$ ． よって，

$$\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7\frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_3^7 = \ln 7-\ln 3 = \ln\frac{7}{3} \ .$$

終

問題 6.8.3　関数 f について， $0<x<\dfrac{3}{2}$ のとき $f(x)=\sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ とする． 定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$ を計算せよ．

例題　実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & （\ x\le 5\ のとき） \\ \sin 5 & （\ x>5\ のとき）\end{cases} \ .$$

定積分 $\int_0^{2\pi}\psi(x)\,dx$ を計算する．

$\int_0^{2\pi}\psi(x)\,dx = \int_0^5\psi(x)\,dx+\int_5^{2\pi}\psi(x)\,dx$ ． $\int_0^5\psi(x)\,dx$ 及び $\int_5^{2\pi}\psi(x)\,dx$ を計算する． $0\le x\le 5$ である各実数 x について $\psi(x)=\cos x$ なので，

$$\int_0^5\psi(x)\,dx = \int_0^5\cos x\,dx = \big[\sin x\big]_0^5 = \sin 5-\sin 0 = \sin 5 \ .$$

$5\le x\le 2\pi$ である実数 x について $x\ne 5$ のとき $\psi(x)=\sin 5$ なので，

$$\int_5^{2\pi}\psi(x)\,dx = \int_5^{2\pi}\sin 5\,dx = (\sin 5)\int_5^{2\pi}1\,dx = (\sin 5)\big[x\big]_5^{2\pi} = (2\pi-5)\sin 5 \ .$$

従って，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\psi(x)\,dx &= \int_0^5\psi(x)\,dx+\int_5^{2\pi}\psi(x)\,dx = \sin 5+(2\pi-5)\sin 5 \\ &= (2\pi-4)\sin 5 \ .\end{aligned}$$

終

問題 6.8.4　実数全体を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & （\ x\le 2\ のとき） \\ \cos 2 & （\ x>2\ のとき）\end{cases} \ .$$

定積分 $\int_0^\pi\varphi(x)\,dx$ を計算せよ．

変数 x の関数 $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を計算するためには， $f(x)\ge 0$ である x の値の範囲と $f(x)\le 0$ である x の値の範囲とに分けて定積分する．

例題　定積分 $\int_0^3|e^x-5|\,dx$ を計算する．

$0\le x\le 3$ である実数 x について， $e^x-5=0$ とすると $x=\ln 5$ ． $0\le x\le\ln 5$ のとき， $e^x\le e^{\ln 5}=5$ ， $e^x-5\le 0$ ， $|e^x-5|=5-e^x$ ． $\ln 5\le x\le 3$ のとき， $e^x\ge e^{\ln 5}=5$ ， $e^x-5\ge 0$ ， $|e^x-5|=e^x-5$ ． これより，

$$\begin{aligned}\int_0^3|e^x-5|\,dx &= \int_0^{\ln 5}(5-e^x)\,dx+\int_{\ln 5}^3(e^x-5)\,dx = [5x-e^x]_0^{\ln 5}+[e^x-5x]_{\ln 5}^3 \\ &= 5\ln 5-e^{\ln 5}+e^0+e^3-15-e^{\ln 5}+5\ln 5 \\ &= 5\ln 5-5+1+e^3-15-5+5\ln 5 \\ &= e^3+10\ln 5-24 \ .\end{aligned}$$

終

問題 6.8.5　定積分 $\displaystyle\int_0^\pi\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$ を計算せよ．

———— 定理の証明

定理 6.8.1 の一部を証明する．

定数 k は変数 x と無関係とする． 実数 a,b について $a\le b$ で，関数 $f(x)$ が a から b まで積分可能であるとする． 等式 $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ を導く． 正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n[\{kf(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})] \ ,$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく．

$$S_n = \sum_{k=1}^n\{kf(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = k\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = kT_n \ .$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とする． S_n は関数 $kf(x)$ のリーマン和なので $\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}S_n$ ． T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty}T_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ． 故に

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}(kT_n) = k\lim_{n\to\infty}T_n = k\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

実数 a,b について $a\le b$ で，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは a から b まで積分可能であるとする． 等式 $\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ を導く． 正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})] \ ,$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad U_n = \sum_{k=1}^n\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく．

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \\ &= \sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}+\sum_{k=1}^n\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \\ &= T_n+U_n \ .\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とする． S_n は関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和なので $\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx = \lim_{n\to\infty}S_n$ ． T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty}T_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ． U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty}U_n = \int_a^b g(x)\,dx$ ． 故に

$$\begin{aligned}\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx &= \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}(T_n+U_n) = \lim_{n\to\infty}T_n+\lim_{n\to\infty}U_n \\ &= \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

定理 6.8.2 の一部を大雑把に証明する． 実数 a,b,c について $a\le b\le c$ であり，関数 f が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるとする． 等式 $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$ を導く． 正の各実数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = c$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$

とおく． S_n は関数 $f(x)$ のリーマン和である． 次のような正の自然数 l をとる： $l<n$ で，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{l-1} \le \xi_l \le x_l \le b \ ,$$

$$b \le \xi_{l+1} \le x_{l+1} \le \xi_{l+2} \le x_{l+2} \le \xi_{l+3} \le x_{l+3} \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = c \ .$$

$m=n-l$ ， $j=k-l$ とおく． $k=j+l$ ． 変数 k の値が $l+1$ から n までの自然数であるとき変数 j の値は 1 から $n-l=m$ までの自然数である． x_l の値を b に替えることにして

$$T_l = \sum_{k=1}^l\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

$$U_m = \sum_{k=l+1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = \sum_{j=1}^m\{f(\xi_{l+j})(x_{l+j}-x_{l+j-1})\}$$

とおく．

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^l\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}+\sum_{k=l+1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \\ &= T_l+U_m \ .\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とする． T_l は近似的に a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和であり $\lim_{l\to\infty}T_l = \int_a^b f(x)\,dx$ ． U_m は近似的に b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和であり $\lim_{m\to\infty}U_m = \int_b^c f(x)\,dx$ ． 故に

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{l,m\to\infty}(T_l+U_m) = \lim_{l\to\infty}T_l+\lim_{m\to\infty}U_m \\ &= \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

定理 6.8.3 を証明する． 実数 a,b について $a\le b$ で，関数 f と g とが a から b まで積分可能であるとする． 区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\le g(x)$ とする． 不等式 $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ を導く． 正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく． $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して， ξ_k は区間 $[a,b]$ に属すので仮定より $f(\xi_k)\le g(\xi_k)$ ，更に $x_{k-1}\le x_k$ より $x_k-x_{k-1}\ge 0$ なので，

$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \le g(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \ ;$$

よって

$$S_n = \sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \le \sum_{k=1}^n\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = T_n \ .$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とする． S_n は関数 f のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty}S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ． T_n は関数 g のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty}T_n = \int_a^b g(x)\,dx$ ． 定理 4.7.5 より

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}S_n \le \lim_{n\to\infty}T_n = \int_a^b g(x)\,dx \ .$$