

§6.5 不定積分の公式

積分の公式を導くには定理6.4.4を用いる：関数 F が微分可能である区間において

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x dx$ を求める。余弦関数 $\cos x$ の原始関数、つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば、

$$\int \cos x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ なので、

$$\int \cos x dx = \int \left(\frac{d}{dx} \sin x \right) dx = \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x dx$ を求める。正弦関数 $\sin x$ の原始関数、つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \sin x$ である関数 $F(x)$ が分かれば、

$$\int \sin x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ なので $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ 、よって

$$\int \sin x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}(-\cos x) \right\} dx = -\cos x + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

反比例 $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) の不定積分 $\int \frac{1}{x} dx$ を求める。反比例 $\frac{1}{x}$ の原始関数、つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{x}$ である関数 $F(x)$ が分かれば、

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ なので、

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \left(\frac{d}{dx} \ln|x| \right) dx = \ln|x| + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

定数 p について $p \neq -1$ とする。冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める。冪関数 x^p の原始関数、つまり $\frac{d}{dx} F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば、

$$\int x^p dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx} x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので、

$$x^p = \frac{1}{p+1} \frac{d}{dx} x^{p+1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right).$$

このことより

$$\int x^p dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right) \right\} dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする。指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める。指数関数 a^x の原始関数、つまり $\frac{d}{dx} F(x) = a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば、

$$\int a^x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ なので

$$a^x = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} \frac{a^x}{\ln a}.$$

このことより

$$\int a^x dx = \int \left(\frac{d}{dx} \frac{a^x}{\ln a} \right) dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する。変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right) &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \tan^{-1} y = \frac{1}{a} \frac{d}{dy} \tan^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{1+y^2} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 \left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} \\ &= \frac{1}{x^2+a^2}. \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right)$ なので、

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right) \right\} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する。変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく。 $a > 0$ なので $a = \sqrt{a^2}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} &= \frac{d}{dx} \sin^{-1} y = \frac{d}{dy} \sin^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}. \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a}$ なので、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \left(\frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

このようにして以下の積分公式が導かれる。

(積分公式) 以下の公式において C は積分定数を表す。

定数 k に対して $\int k dx = kx + C$ 。

定数 p に対して、 $p \neq -1$ のとき $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$ 。

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

定数 a に対して、 $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 。

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C.$$

定数 a に対して、 $a \neq 0$ のとき $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$ 。

定数 a に対して、 $a > 0$ のとき $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$ 。

例 積分定数を C とおく。 -1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$ 。この公式を用いる。

$$\int x^4 dx = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C = \frac{1}{5} x^5 + C.$$

$$\int \frac{1}{y^4} dy = \int y^{-4} dy = \frac{1}{-4+1} y^{-4+1} + C = -\frac{1}{3} y^{-3} = -\frac{1}{3y^3} + C.$$

$$\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{u^3} + C. \quad \text{終}$$

問題 6.5.1 不定積分 $\int \frac{1}{x^5} dx$ を計算せよ。

問題 6.5.2 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ を計算せよ。

例題 不定積分 $\int e^{3x} dx$ を計算する。

積分定数を C とおく。定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 。

$$\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C. \quad \text{終}$$

問題 6.5.3 不定積分 $\int e^{\frac{x}{4}} dx$ を計算せよ。

例題 不定積分 $\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy$ を計算する。

積分定数を C とおく。0 以外の定数 a について $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$ 。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy &= \int \frac{1}{y^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}} dy = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2y}{\sqrt{3}} + C. \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 6.5.4 不定積分 $\int \frac{1}{u^2 + \frac{9}{7}} du$ 計算せよ。

問題 6.5.5 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}} dy$ 計算せよ。