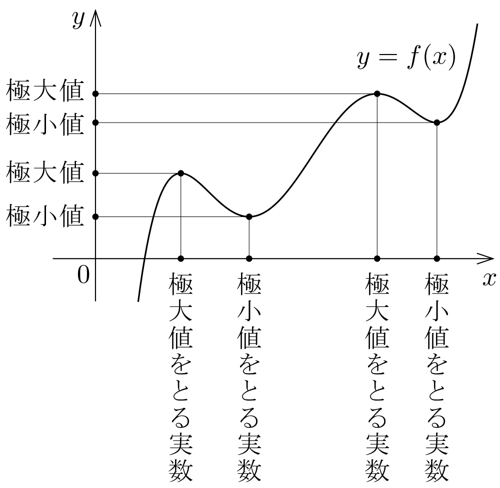
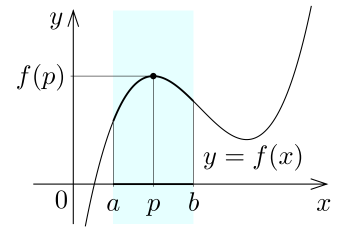
§5.1　関数の極値

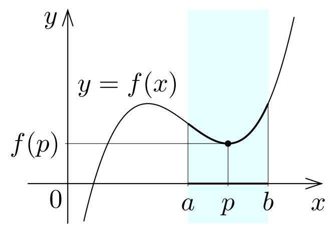
実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属すものとする．f が p において**極大値**をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最大になることである．また，f が p において**極小値**をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最小になることである．座標平面における f のグラフでいうと右図のようになる．



正確な定義を述べる．関数 f 及び実数 p について，f が p において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである： $a<p<b$ となるある実数 a,b を選ぶと，$a<x<b$ となる各実数 x について $f(p) \geq f(x)$ ．また，f が p において極小値をとるとは次の条件が成り立つことである： $a<p<b$ となるある実数 a,b を選ぶと，$a<x<b$ となる各実数 x について $f(p) \leq f(x)$ ．



f が p において極大値をとる．明緑色の部分だけを考えると f は p において最大値をとる．

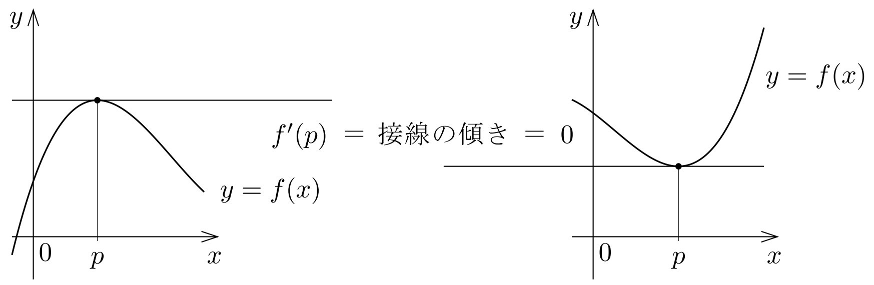


f が p において極小値をとる．明緑色の部分だけを考えると f は p において最小値をとる．

極大値と極小値を併せて**極値**という．

関数の最大値・最小値はあるとしても 1 個だけであった．関数の極大値・極小値は，数多くあることがあるし，1 個もないこともある．

2.6 節で述べたように，関数 f が実数 p において微分可能であるとき，微分係数 $f'(p)$ は f のグラフの点 $\big(p, f(p)\big)$ における接線の傾きである．関数のグラフにおいて，関数が極値をとるところで，接線は“水平”である，つまり接線の傾きは 0 である．



関数 f が実数 p において極値をとるときのグラフの状況

このように考えると次の定理が分かる．その証明は省く．

定理 5.1　関数 f が実数 p において微分可能であるとき，f が p において極値をとるならば $f'(p)=0$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ より $f'(x)=3x^2-6x-9$ ．実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p)=0$ なので，$3p^2-6p-9=0$ ，$3(p+1)(p-3)=0$ ，よって $p=3,-1$ ．関数 f には異なる 2 個の極値があるので，f は 3 と -1 とにおいて極値をとる．$f(-1)=25$ ，$f(3)=-7$ なので，関数 f の極値は 25 と -7 との 2 個である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.1}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-2x^2-4x$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求めよ．