§4.8 級数

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ を順に $+$ でつないだ形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を（無限）**級数** (series) という；正確には次のように書き表す：

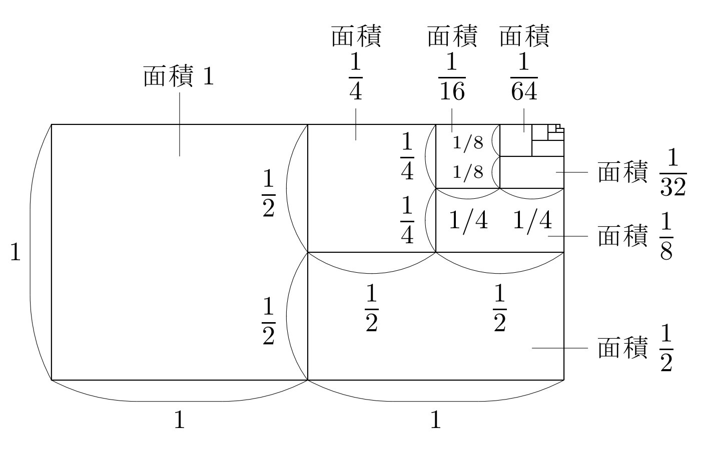
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

この（無限）級数では，無限個の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ の値を合計したい．しかし，無限個の値を合計することは実際にはできない．

$\boxed{\text{例解}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ つまり

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

を考える．次のように，面積が $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$ の長方形をくっつけていく．



このように長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

となる．このように無限個の値を合計することはできない．しかし，このような長方形を限りなくくっつけていくと，面積が 2 の長方形に限りなく近づいていく．このことから次のように考える：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 2 \ .$$

このことは次のような計算で裏付けられる：

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2^n} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 2 \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

一般的に，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値を次のように定義する：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k
\end{aligned}$$

この極限値を**級数の和**という．

定義　自然数 m に対する値から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq m}$ に対して，数列 $\left\{\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ が収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は収束するといい，数列 $\left\{\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$ を級数 $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k \ .$$

この極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$ を級数の和という．また，数列 $\left\{\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ が発散するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は発散するという．

つまり，例えば数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ があるときに限り級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値があって

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \ ;$$

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ がないときは級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値もない．

$\boxed{\text{例題}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right)$ の和を調べる．

〔方針〕 級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right)$ ．まず総和 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right)$ を計算する．

〔解答〕

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right) &= \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} + \cdots + \frac{5}{n-1} - \frac{5}{n} + \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \\
&= \frac{5}{2} - \frac{5}{n+1} \ .
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}\right) \\
&= \frac{5}{2} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.8.1}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1}\right)$ の和を調べよ．

実数の定数 a, r 及び自然数の定数 m に対して，等比数列 $\{ar^n\}_{n\geq 0}$ からできる級数 $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} (ar^n)$ を等比級数という．

$\boxed{\text{例題}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる．

〔方針〕 級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ ．まず総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する．

〔解答〕 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく．

$$\begin{aligned}
S_n &= 4 \cdot \frac{3}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n \ , \\
\frac{3}{5} S_n &= \qquad\quad 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \ ;
\end{aligned}$$

この 2 つの等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5} S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \ ,$$

よって $S_n = 6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ つまり $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = 6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right\} = 6 - 10 \cdot 0 \\
&= 6 \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.8.2}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ の和を調べよ．

$\boxed{\text{例題}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる．

〔方針〕 級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ ．まず総和 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する．

〔解答〕 等比数列の項の和の公式より

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = 3\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{7}\right)^k = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{21}{2}\left\{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\} \ .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{21}{2}\left\{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}\right] = \frac{21}{2}(1 - 0) \\
&= \frac{21}{2} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.8.3}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べよ．

級数について次の定理が成り立つ．

定理　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ．

証明　数列 $\{S_n\}_{n\geq 0}$ を $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ と定める． $n \geq 1$ である自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \ , \\
S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ ;
\end{aligned}$$

よって

$$S_n - S_{n-1} = a_n \ .$$

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するので，その和を S とおく．

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \ ;$$

従って更に

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S \ .$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) - \left(\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\right) = S - S = 0 \ .$$

（証明終り）

つまり，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について次のようになる：

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する　ならば　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する．

この対偶をとると次のことが分かる：

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が 0 に収束しない　ならば　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない．

従って，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が発散するとき，及び，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が収束しても $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ のとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない．

定理 4.8.1

(1) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が発散するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が収束して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

この定理より，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が収束して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．しかし， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散することがある（後で例を挙げる）； $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるからといって級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない．

$\boxed{\text{例題}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ の和を調べる．

公比 $\frac{6}{5}$ の等比数列 $\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は発散するので，定理 4.8 の (1) より，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ は発散する． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.8.4}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$ の和を調べよ．

$\boxed{\text{例題}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$ の和を調べる．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) = 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 5 - 0 = 5 \ .$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) \neq 0$ なので，定理 4.8 の (2) より，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$ は発散する． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.8.5}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{n^2+3} - 7\right)$ の和を調べよ．

$\boxed{\text{例題}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k} \ .$$

まず $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k}$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k} &= \sum_{k=0}^{n} \left\{5\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} = 5\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 5\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 5\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{15}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) \ .
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$ なので，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{15}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)\right\} = \frac{15}{2} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.8.6}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$ の和を調べよ．

等比級数について次の定理が成り立つ．

定理 4.8.2　最初の項が a で公比が r である無限等比数列に対する級数は， $|r| < 1$ のとき収束して

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \frac{a}{1-r} \ ,$$

$|r| \geq 1$ かつ $a \neq 0$ のとき発散する．

証明

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (ar^k) \ .$$

$|r| < 1$ のとき：定理 1.5.2 より

$$\sum_{k=0}^{n} (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1-r} \ ,$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (ar^k) = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^{n+1})}{1-r} = \frac{a\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^{n+1}\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \ ,$$

よって

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (ar^k) = \frac{a}{1-r} \ .$$

$a \neq 0$ とする． $r = 1$ のとき：

$$\sum_{k=0}^{n} (ar^k) = \sum_{k=0}^{n} a = a(n+1) \ ,$$

これは $n \to \infty$ のとき発散する；従って級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)$ は発散する． $r > 1$ または $r \leq -1$ のとき：定理 1.5.2 より

$$\sum_{k=0}^{n} (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r-1} \ ;$$

$n \to \infty$ のとき， r^{n+1} は発散するので $\dfrac{a(r^{n+1} - 1)}{r-1}$ も発散する；従って級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)$ は発散する．

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる．

公比 $\frac{3}{7}$ について $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$ なのでこの級数は収束する．

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\} &= \frac{6}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^3 + \frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^4 + \cdots = \frac{\frac{6}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{6}{4} \\
&= \frac{3}{2} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.8.7}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べよ．

級数について次の定理が成り立つ．

定理　定数 c 及び数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と $\{b_n\}_{n\geq 0}$ とがあるとする．級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とが収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{（複号同順）} \ .$$

証明　定理 1.2.1 より $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (ca_k) = c\sum_{k=0}^{n} a_k$ なので，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (ca_k) = \lim_{n\to\infty} \left(c\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = c\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

定理 1.2.2 より $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$ なので，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とが収束するならば，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ .
\end{aligned}$$

（証明終り）

——— 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散する例

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について次のことが成り立った：

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ．

しかしこの逆はいつも成り立つとは限らない．つまり，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散することがある．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように定める：自然数 n に対して，

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n \ .$$

まずこの数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の極限がどうなるか調べる．対数の性質より

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0 \ .$$

次にこの数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ からできる級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を調べる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \{\ln(k+1) - \ln k\} \\
&= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + (\ln 5 - \ln 4) + \\
&\qquad \cdots + \{\ln n - \ln(n-1)\} + \{\ln(n+1) - \ln n\} \\
&= -\ln 1 + \ln(n+1) = \ln(n+1) \ .
\end{aligned}$$

従って，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty \ .$$

つまり級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は ∞ に発散する．

このように， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ だが級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する． $\boxed{\text{終}}$