§4.7　数列の極限

まず4.1節で述べた関数の極限を再述する：関数 f について，どんなに大きい実数 K に対しても $x>K$ となる f の定義域の実数 x があって，

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと
f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

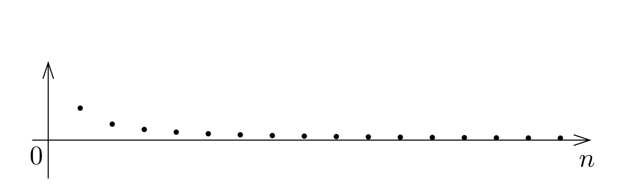
とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限値という；そしてこの極限値 c を $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す.

数列は関数（の一種）であるから，上述の関数の極限の定義はそのまま無限数列に適用できる．無限数列 $\{a_n\}$ について，

自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと
項 a_n の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$\{a_n\}$ は c に**収束する** (converge) といい，c を $\{a_n\}$ の**極限（値）** (limit value) という；この極限（値）を $\lim_{n\to\infty} a_n$ と書き表す：$\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

$\boxed{\text{例}}$　変数 x の関数 $\dfrac{1}{x}$ は $x \to \infty$ のとき 0 に収束する：$\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ．同様に，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ は 0 に収束する：$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ．$x \to \infty$ のときの関数 $\dfrac{1}{x}$ の極限 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したのが数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$ である.



数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ のグラフ

$\boxed{\text{終}}$

無限数列 $\{a_n\}$ がどんな定数にも収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散する** (diverge) という．無限数列 $\{a_n\}$ が発散するとき，式 $\lim_{n\to\infty} a_n$ の値はない.

無限数列 $\{a_n\}$ について，自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと a_n の値も限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

と書き表す．例を挙げる：

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty \ , \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \ .$$

無限数列 $\{a_n\}$ について，自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと，$a_n < 0$ であってその絶対値 $|a_n|$ が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書き表す.

数列について，発散するが ∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもないとき，振動するという.

$\boxed{\text{例}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を $a_n = (-2)^n$ と定める：

$$a_0 = 1 \ , \quad a_1 = -2 \ , \quad a_2 = 4 \ , \quad a_3 = -8 \ , \quad a_4 = 16 \ , \quad a_5 = -32 \ , \quad \cdots \ .$$

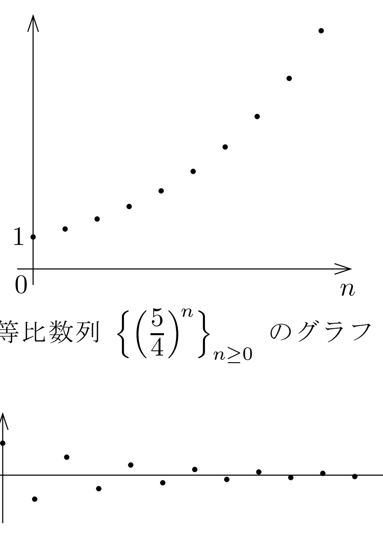
この数列は発散する（収束しない）が，∞ にも $-\infty$ にも発散しない．つまりこの数列は振動する.　$\boxed{\text{終}}$

結局，無限数列の極限について次のように分類される：

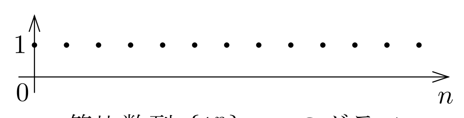
$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{限りなく唯一つの実数に近づく} = \text{極限（値）がある} \\ \text{収束しない} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外（振動する）} \end{cases} \end{cases} .$$

等比数列の極限について考える.

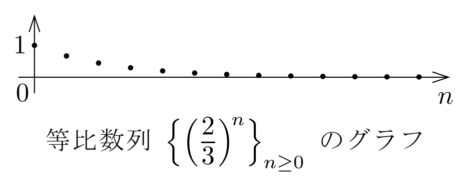
$\boxed{\text{例}}$　6 つの等比数列 $\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$, $\{1^n\}_{n\geq 0}$, $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$, $\left\{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$, $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$, $\left\{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフを描く.



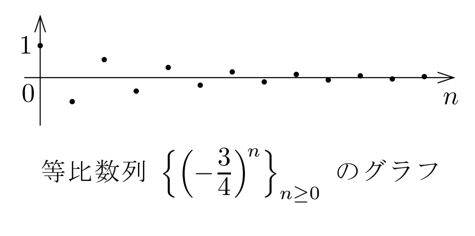
等比数列 $\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフ



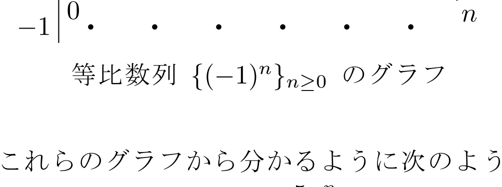
等比数列 $\{1^n\}_{n\geq 0}$ のグラフ



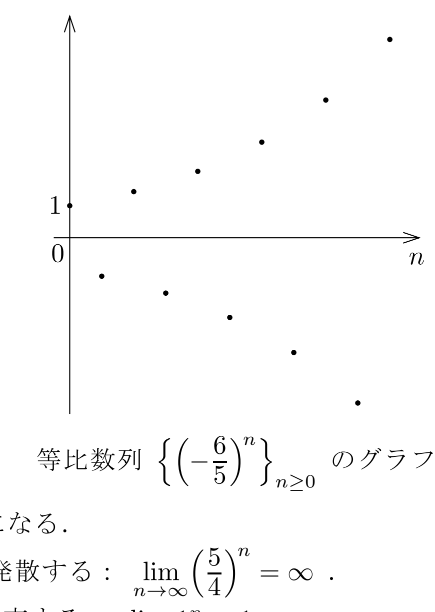
等比数列 $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\left\{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\left\{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフ

これらのグラフから分かるように次のようになる.

等比数列 $\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は ∞ に発散する：$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = \infty$.

等比数列 $\{1^n\}_{n\geq 0}$ は 1 に収束する：$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

等比数列 $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する：$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

等比数列 $\left\{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する：$\lim_{n\to\infty} \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

等比数列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$ は発散するが ∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する），

$\left\{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は発散するが ∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する）.　$\boxed{\text{終}}$

一般的に述べると次の定理が成り立つ（証明は省く）.

定理 4.7.1　定数 r は実数とする．無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようになる：

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = \infty \ ;$$
$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = 1 \ ;$$
$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \ ;$$

$r \leq -1$ のとき，無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが，∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する）.

無限数列の極限は関数の極限の一種なので，4.2 節の定理は数列の極限にも適用できる．関数 f, g について，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば次のことが成り立つ（定理 4.2.1）：

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x)+g(x)\} = \left\{\lim_{x\to\infty} f(x)\right\} + \left\{\lim_{x\to\infty} g(x)\right\} \ ;$$

この等式において f を数列 $\{a_n\}$ として g を数列 $\{b_n\}$ とすると次のようになる：

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \ .$$

このようにして，関数の極限に関する定理4.2.1を数列に適用すると次のようになる.

定理 4.7.2　無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \quad \text{（複号同順）} \ ,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \ ;$$

$b_n \neq 0$ で，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束して $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \ .$$

この定理より，例えば次のことが導かれる：自然数を表わす変数 n と無関係な定数 k について，$\lim_{n\to\infty} k = k$ なので，無限数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + k) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \lim_{n\to\infty} k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + k \ ,$$
$$\lim_{n\to\infty} (k\,a_n) = \left(\lim_{n\to\infty} k\right) \lim_{n\to\infty} a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

関数の極限に関する定理 4.2.2 を数列に適用すると次のようになる.

定理 4.7.3　数列 $\{a_n\}$ の項は総て関数 f の定義域に属すとする．$\{a_n\}$ が収束してかつ極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ において関数 f が連続であるならば，

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \ .$$

関数の極限に関する定理 4.2.3 を数列に適用すると次のようになる.

定理 4.7.4　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．自然数を表す変数 n 及び数列 $\{a_n\}$ と，変数 x の関数 $f(x)$ とについて，$a_n = f(x)$ で，$n \to \infty$ のとき $x \to a$, $x \neq a$ とする．$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to a} f(x) \ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　数列 $\left\{\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}} - 8\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

変数 x を $x = \dfrac{2n+5}{3}$ とおく．$\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}} = \sqrt{x}$ ．$n \to \infty$ のとき $x \to \infty$ ．$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$ なので，$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2n+5}{3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$ ，よって

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8\right) = \infty \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.7.1}}$　数列 $\left\{\dfrac{7}{\sqrt{n+3}} + 4\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べよ.

$\boxed{\text{例題}}$　数列 $\left\{7 - \dfrac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n\geq 1}$ の極限を調べる．．

$7 - \dfrac{5}{2^{n-3}} = 7 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$ ．変数 m を $m = n-3$ とおく．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^m$ ．$n \to \infty$ のとき $m \to \infty$ ．$\lim_{m\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^m = 0$ なので，$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = \lim_{m\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^m = 0$ ．よって

$$\lim_{n\to\infty} \left(7 - \frac{5}{2^{n-3}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left\{7 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} = 7 - 5 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 7 - 5 \cdot 0$$
$$= 7 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.7.2}}$　数列 $\left\{8 - 5\left(-\dfrac{6}{7}\right)^{n-3}\right\}_{n\geq 1}$ の極限を調べよ.

$\boxed{\text{問題 4.7.3}}$　数列 $\left\{\dfrac{8}{3^{n+2}} - 4\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べよ.

$\boxed{\text{例題}}$　数列 $\left\{\dfrac{3^{n+2}}{4^n}\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

$\dfrac{3^{n+2}}{4^n} = \dfrac{3^2 3^n}{4^n} = 3^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ．$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \left\{3^2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\} = 3^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3^2 \cdot 0 = 0 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.7.4}}$　数列 $\left\{\dfrac{5^n}{4^{n+3}}\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べよ.

もう一つ定理を述べる（証明は省く）.

定理 4.7.5　無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とは収束するとする．これらの両方の定義域に属す任意の自然数 n について $a_n \geq b_n$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$.