§3.7　逆三角関数の導関数

定理 3.7　逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ 及び逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の導関数は，各々，

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (\ -1<x<1\ )\ ,$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (\ -1<x<1\ )\ .$$

証明　逆正接関数 $\tan^{-1}x$ を微分する．変数 y を $y=\tan^{-1}x$ とおく．逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は正接関数 $\tan x$ の逆関数なので

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x\ .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x\ .$$

この等式の左辺は定理 3.5 と微分公式 $\dfrac{d}{dx}\tan x = 1+\tan^2 x$（定理 3.4.1）より

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dy}\tan y\cdot\frac{dy}{dx} = (1+\tan^2 y)\frac{dy}{dx}\ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx}x=1$ なので，$(1+\tan^2 y)\dfrac{dy}{dx}=1$ ，よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y}\ .$$

$y=\tan^{-1}x$ ，$\tan y=\tan(\tan^{-1}x)=x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$（$-1\le x\le 1$）を微分する．変数 y を $y=\sin^{-1}x$ とおく．逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ は正弦関数 $\sin x$ の逆関数なので

$$\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x\ .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}x\ .$$

この等式の左辺は定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dy}\sin y\cdot\frac{dy}{dx} = \cos y\cdot\frac{dy}{dx}\ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx}x=1$ なので，$\cos y\cdot\dfrac{dy}{dx}=1$ ，よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}\ . \tag{1}$$

$\cos y$ を x の式で表す．$\sin^2 y+\cos^2 y=1$ 及び $\sin y=\sin(\sin^{-1}x)=x$ より，

$$\cos^2 y = 1-\sin^2 y = 1-x^2\ ,$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1-x^2}\ .$$

区間 $[-1,1]$ を定義域とする逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ の値域は区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ なので（0.9 節参照），$-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos y\ge 0$ ．これより

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}\ .$$

この等式と等式 (1) とより

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

$y=\sin^{-1}x$ なので $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ．

逆余弦関数 $\cos^{-1}x$（$-1\le x\le 1$）を微分する．変数 y を $y=\cos^{-1}x$ とおく．逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ は余弦関数 $\cos x$ の逆関数なので

$$\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x\ .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\cos y = \frac{d}{dx}x\ .$$

この等式の左辺は定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx}\cos y = \frac{d}{dy}\cos y\cdot\frac{dy}{dx} = -\sin y\cdot\frac{dy}{dx}\ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx}x=1$ なので，$-\sin y\cdot\dfrac{dy}{dx}=1$ ，よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}\ . \tag{2}$$

$\sin^2 y+\cos^2 y=1$ 及び $\cos y=\cos(\cos^{-1}x)=x$ より，

$$\sin^2 y = 1-\cos^2 y = 1-x^2\ ,$$

$$\sin y = \pm\sqrt{1-x^2}\ .$$

区間 $[-1,1]$ を定義域とする逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ の値域は区間 $[0,\pi]$ なので（0.9 節参照），$0\le y\le\pi$ ，よって $\sin y\ge 0$ ．これより

$$\sin y = \sqrt{1-x^2}\ .$$

この等式と等式 (2) とより

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

$y=\cos^{-1}x$ なので $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ．　（証明終り）

例題　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2\tan^{-1}x$ と定める．関数 f の導関数 f' を求める．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2\tan^{-1}x) = \frac{d}{dx}x^2\cdot\tan^{-1}t + x^2\cdot\frac{d}{dx}\tan^{-1}x \\ &= 2x\tan^{-1}x + \frac{x^2}{x^2+1}\ . \end{aligned}$$

終

例題　変数 s の関数 $t=\dfrac{\sin^{-1}s}{s^2}$ を微分する．

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{d}{ds}\frac{\sin^{-1}s}{s^2} = \frac{\dfrac{d}{ds}\sin^{-1}s\cdot s^2 - \sin^{-1}s\cdot\dfrac{d}{ds}s^2}{(s^2)^2} \\ &= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}\cdot s^2 - \sin^{-1}s\cdot 2s}{s^4} = \frac{s^2\dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}}{s^4} - \frac{2s\sin^{-1}s}{s^4} \\ &= \frac{1}{s^2\sqrt{1-s^2}} - \frac{2\sin^{-1}s}{s^3}\ . \end{aligned}$$

終

問題 3.7.1　変数 u の関数 $v=\dfrac{\tan^{-1}u}{u^2+1}$ を微分せよ．

問題 3.7.2　区間 $[-1,1]$ を定義域とする関数 g を $g(x)=(1-x^2)\sin^{-1}x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求めよ．

例題　変数 x の関数 $\sin^{-1}x^2$ を微分する．

変数 y を $y=x^2$ とおく．$\sin^{-1}x^2=\sin^{-1}y$ なので，定理 3.5 を用いると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin^{-1}x^2 &= \frac{d}{dx}\sin^{-1}y = \frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{d}{dx}x^2 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot 2x \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\ . \end{aligned}$$

終

問題 3.7.3　変数 t の関数 $\tan^{-1}t^3$ を微分せよ．

問題 3.7.4　変数 y の関数 $z=\sqrt{\cos^{-1}y}$ を微分せよ．