§3.6　いくつかの関数の導関数

指数関数の導関数は次のようになる．

定理 3.6.1　定数 a は実数で $a>0$ ，$a\neq 1$ のとき，a を底とする指数関数 a^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \ .$$

特に，自然対数の底 e に対して，指数関数 e^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ .$$

証明　変数 y を $y=a^x$ とおく． $\dfrac{d}{dx}a^x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y=a^x$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a \ .$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a) \ . \tag{1}$$

この等式 (1) の左辺は，定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \ ;$$

$\ln a$ は定数なので，等式 (1) の右辺は

$$\frac{d}{dx}(x\ln a) = \ln a \cdot \frac{d}{dx}x = \ln a \cdot 1 = \ln a \ ;$$

従って $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \ln a$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = y\ln a \ .$$

$y=a^x$ なので， $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$ ．

特に， $a=e$ のとき， $\ln e = \log_e e = 1$ なので，

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x \ .$$

（証明終り）

例題　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3^x \sin x$ と定める． 関数 g の導関数 g' を求める．

$\dfrac{d}{dx}3^x = 3^x \ln x$ なので，

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(3^x \sin x) = \frac{d}{dx}3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{d}{dx}\sin x = 3^x\ln 3 \sin x + 3^x \cos x$$
$$= 3^x(\ln 3 \sin x + \cos x) \ .$$

終

問題 3.6.1　実数全体を定義域とする関数 f を $g(x) = 2^x \cos x$ と定める． 関数 f の導関数 f' を求めよ．

例題　変数 x の関数 $y = \dfrac{x^3}{5^x}$ を微分する．

$\dfrac{d}{dx}5^x = 5^x\ln 5$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{5^x} = \frac{\frac{d}{dx}x^3 \cdot 5^x - x^3 \frac{d}{dx}5^x}{(5^x)^2} = \frac{3x^2 5^x - x^3 5^x \ln 5}{(5^x)^2}$$
$$= \frac{3x^2 - x^3\ln 5}{5^x} \ .$$

終

問題 3.6.2　変数 x の関数 $y = \dfrac{\sin x}{3^x}$ を微分せよ．

例題　変数 x の関数 $y = e^{2x-3}$ を微分する．

変数 t を $t = 2x-3$ とおく． $y = e^{2x-3} = e^t$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^t = \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{dt}{dx} = e^t \cdot \frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3}\cdot 2$$
$$= 2e^{2x-3} \ .$$

終

問題 3.6.3　変数 u の関数 $v = e^{5-3u}$ を微分せよ．

実数を指数とする冪関数の導関数は次のようになる．

定理 3.6.2　実数 p を指数とする冪関数 x^p の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} \quad (\ x>0\ ) \ .$$

証明　変数 y を $y = x^p$ （ $x>0$ ）とおく． $\dfrac{d}{dx}x^p = \dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y=x^p$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln x^p = p\ln x \ .$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p\ln x) \ . \tag{2}$$

この等式 (2) の左辺は，定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \ ;$$

p は定数なので，等式 (2) の右辺は，

$$\frac{d}{dx}(p\ln x) = p\frac{d}{dx}\ln x = p\frac{1}{x} \ ;$$

従って $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{1}{x}$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = p\frac{y}{x} \ .$$

$y=x^p$ なので， $\dfrac{d}{dx}x^p = p\dfrac{x^p}{x} = px^{p-1}$ ．　（証明終り）

冪関数の微分公式を並べてみる．

定理 3.1.1： 定数 n が正の整数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ；

定理 3.4.3： 定数 n が整数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ （ $x\neq 0$ ）；

定理 3.6.2： 定数 p が実数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$ （ $x>0$ ）．

冪関数の指数の範囲が広がると独立変数 x の値の範囲は狭くなる．

例題　変数 x の関数 $\sqrt[3]{x}^{\,2}$ を微分する．

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}^{\,2} = \frac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \ .$$

終

問題 3.6.4　変数 x の関数 $\sqrt[5]{x}^{\,3}$ を微分せよ．

例題　変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{5}{3x}}$ （ $x>0$ ）を微分する．

$\sqrt{\dfrac{5}{3x}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}x^{-\frac{1}{2}}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{5}{3x}} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{5}{12x}} \ .$$

終

問題 3.6.5　変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{5x}}$ （ $x>0$ ）を微分せよ．

例題　変数 y の関数 $z = \sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する．

〔解説〕 変数 t を $t = y^2-3y+5$ とおく． $z = \sqrt{y^2-3y+5} = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ なので，定理 3.5 を用いると，

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dy}(y^2-3y+5) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(2y-3)$$
$$= \frac{2y-3}{2\sqrt{y^2-3y+5}} \ .$$

終

問題 3.6.6　変数 y の関数 $z = \sqrt{3y^2-5y+4}$ を微分せよ．

例題　区間 $\left[-\dfrac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^{\,3}$ と定める． 7 における f の微分係数を求める．

変数 t を $t = 5x+1$ とおく． $f(x) = \sqrt{5x+1}^{\,3} = \sqrt{t}^{\,3} = t^{\frac{3}{2}}$ なので，f の導関数 f' は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(5x+1) = \frac{3}{2}\sqrt{t}\cdot 5$$
$$= \frac{15}{2}\sqrt{5x+1} \ .$$

7 における f の微分係数は

$$f'(7) = \frac{15}{2}\sqrt{5\cdot 7+1} = \frac{15}{2}\sqrt{36} = \frac{15}{2}\cdot 6 = 45 \ .$$

終

問題 3.6.7　区間 $\left[\dfrac{5}{6},\infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{6x-5}^{\,3}$ と定める． 9 における g の微分係数を求めよ．

最後に，定理 3.1.3 を拡張する．

定理 3.6.3　関数 $\ln|x|$ （ $x\neq 0$ ）の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad (\ x\neq 0\ ) \ .$$

証明　$x\neq 0$ なので， $x>0$ または $x<0$ ． $x>0$ のときは， $|x| = x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \ .$$

$x<0$ のときは， $y=-x$ とおくと， $|x| = -x = y$ なので，定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \ .$$

故に，どちらのときも $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$ ．　（証明終り）

例題　変数 y の関数 $z = \ln|y^3+2|$ を微分する．

変数 t を $t = y^3+2$ とおく． $z = \ln|y^3+2| = \ln|t|$ なので，

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}\ln|t| = \frac{d}{dt}\ln|t|\cdot\frac{dt}{dy} = \frac{1}{t}\cdot\frac{d}{dy}(y^3+2) = \frac{1}{y^3+2}3y^2$$
$$= \frac{3y^2}{y^3+2} \ .$$

終

問題 3.6.8　変数 x の関数 $y = \ln|\cos x|$ を微分せよ．