§3.1 導関数

例解　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3$ と定める．定理2.5.1より，各実数 x における φ の微分係数は $3x^2$ である．例えば，

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot 2^2=12 \ ,$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot 5^2=75 \ ,$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot(-4)^2=48 \ .$$

各実数 x に対して，x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる．よって

$$x \text{ に対して } x \text{ における } \varphi \text{ の微分係数 } 3x^2 \text{ を定める 関数}$$

ができる．この関数を φ の導関数といい，φ' と書き表す．φ の導関数 φ' の値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数なので，$\varphi'(x)=3x^2$ ．例えば次のようになる：

2 における導関数 φ' の値 $\varphi'(2)=12$ は 2 における φ の微分係数である；

5 における導関数 φ' の値 $\varphi'(5)=75$ は 5 における φ の微分係数である．

このように，導関数とは微分係数を求めるための関数である．　終

一般的に述べる．関数 f の定義域の各実数 x に対して，x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに決まる．従って，

$$x \text{ に対して } x \text{ における } f \text{ の微分係数を対応させる 関数}$$

を定義できる．この関数を f の**導関数** (derived function) という．

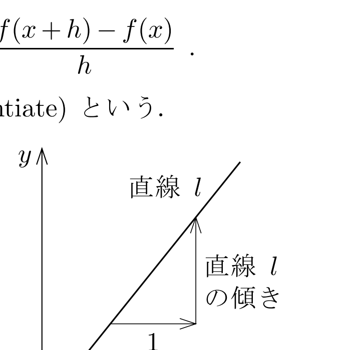
定義　関数 f の導関数とは，f の定義域の各実数 x に対して x における f の微分係数を対応させる関数のことである [1]．関数 f の導関数を f' と書き表す．

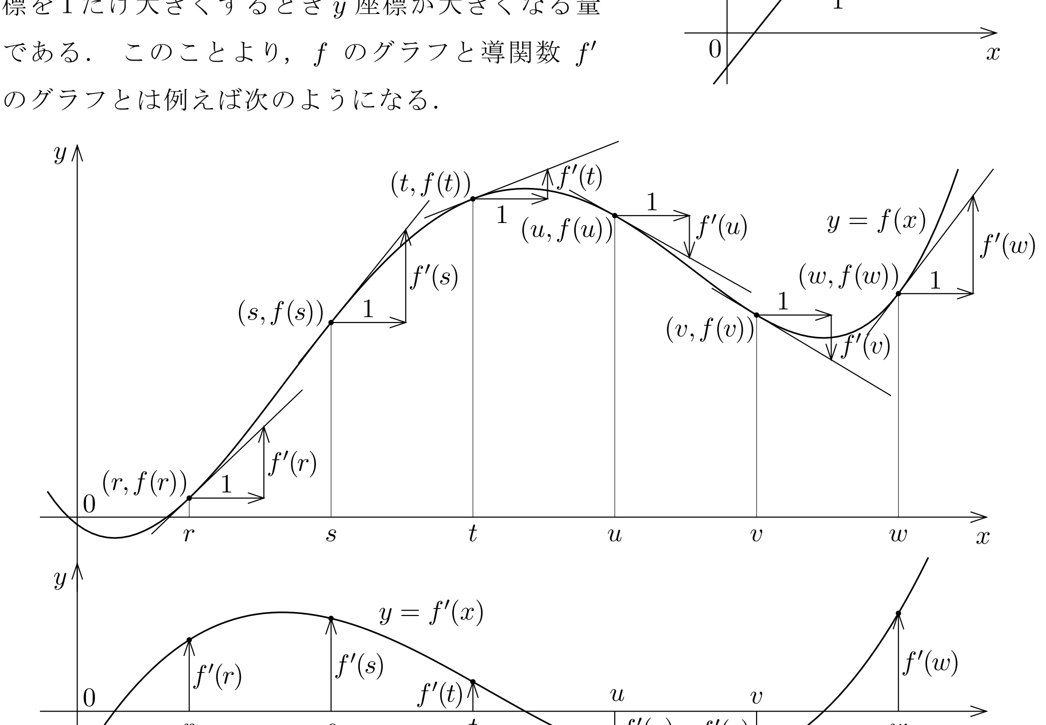
関数 f の導関数 f' とは次のような関数である：実数 x に対する値 $f'(x)$ は x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ である，つまり

$$f'(x)=〔\,f \text{ の } x \text{ における微分係数}〕=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ .$$

関数 f の導関数を求めることを，f を**微分する** (differentiate) という．

関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は x における f の微分係数なので，f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きである（2.6節参照）．xy 座標平面における直線の傾きは，右図のように，x 座標を1だけ大きくするとき y 座標が大きくなる量である．このことより，f のグラフと導関数 f' のグラフとは例えば次のようになる．





微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ [2]，$\dfrac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す；

$$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \ .$$

つまり，変数 x の関数 $f(x)$ に対して，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ [3] は $f(x)$ を微分した結果を表す．また，変数 t の関数 $g(t)$ に対して，$\dfrac{d}{dt}g(t)$ は $g(t)$ を微分した結果を表す．例えば，

変数 y の冪関数 y^4 の導関数を $\dfrac{d}{dy}y^4$ と書き表し，

変数 t の正弦関数 $\sin t$ の導関数を $\dfrac{d}{dt}\sin t$ と書き表し，

変数 u の対数関数 $\ln u=\log_e u$ の導関数を $\dfrac{d}{du}\ln u$ と書き表す．

正の整数 n に対して，冪関数 x^n の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数で，定理2.5.1より

$$x \text{ における冪関数 } x^n \text{ の微分係数は } \lim_{t\to x}\frac{t^n-x^n}{t-x}=nx^{n-1} \ .$$

こうして次の公式が成り立つ．

定理 3.1.1　正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1} \ .$$

この定理より例えば次のようになる：

$$\frac{d}{dx}x^3=3x^2 \ , \qquad \frac{d}{dt}t^5=5t^4 \ , \qquad \frac{d}{dy}y^2=2y^1=2y \ .$$

特に，$x=x^1$ なので，

$$\frac{d}{dx}x=\frac{d}{dx}x^1=1x^0=1 \ .$$

例　4 を指数とする冪関数 x^4 を $f(x)$ とおく：$f(x)=x^4$ ．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}x^4=4x^3$ である．関数 $f(x)$ の -2 における微分係数は $f'(-2)=4(-2)^3=-32$ である．　終

問題 3.1.1　5 を指数とする冪関数 x^5 を $f(x)$ とおく．関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めて，$f(x)$ の -2 における微分係数を求めよ．

各実数 x に対して，x における定数関数の微分係数は 0 である（定理2.5.2）．従って，変数 x に無関係な定数 k に対して，$f(x)=k$ となる定数関数 f の導関数は

$$\frac{d}{dx}k=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=0 \ .$$

定理 3.1.2　変数 x に無関係な定数 k に対して，定数関数 k の導関数は

$$\frac{d}{dx}k=0 \ .$$

この定理より例えば次のようになる：

$$\frac{d}{dx}6=0 \ , \qquad \frac{d}{dt}5^3=0 \ , \qquad \frac{d}{dy}\ln 7=0 \ .$$

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数であり，定理2.8より，各実数 x に対して

$$x \text{ における正弦関数 } \sin x \text{ の微分係数は } \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$$

であるので，$\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ ．同様に，余弦関数 $\cos x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos x$ の値は $\cos x$ の微分係数であり，各実数 x に対して

$$x \text{ における余弦関数 } \cos x \text{ の微分係数は } \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x$$

であるので，$\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ ．

定理 3.1.3　正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の導関数は，それぞれ，

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x \ , \qquad \frac{d}{dx}\cos x=-\sin x \ .$$

例　正弦関数 $\sin x$ を $f(x)$ とおく：$f(x)=\sin x$ ．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ ．関数 $f(x)$ の $\dfrac{2\pi}{3}$ における微分係数は

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2} \ .$$

終

例　余弦関数 $\cos x$ を $g(x)$ とおく：$g(x)=\cos x$ ．関数 $g(x)$ の導関数は $g'(x)=\dfrac{d}{dx}g(x)=\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ ．関数 $g(x)$ の $\dfrac{5\pi}{6}$ における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\frac{5\pi}{6}=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2} \ .$$

終

問題 3.1.2　正弦関数 $\sin x$ を $g(x)$ とおく．関数 $g(x)$ の導関数を求めて，$g(x)$ の $\dfrac{5\pi}{3}$ における微分係数を求めよ．

問題 3.1.3　余弦関数 $\cos x$ を $f(x)$ とおく．関数 $f(x)$ の導関数を求めて，$f(x)$ の $\dfrac{11\pi}{6}$ における微分係数を求めよ．

定数 a について $a>0$ ，$a\neq 0$ とする．定理2.9より，$x>0$ である各実数 x について，

$$x \text{ における対数関数 } \log_a x \text{ の微分係数は } \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{\log_a e}{x}$$

なので，

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{\log_a e}{x} \ ;$$

対数の底の変換公式より

$$\log_a e=\frac{\log_e e}{\log_e a}=\frac{1}{\ln a} \ ,$$

よって

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a} \ .$$

特に $a=e$ のときは，$\ln e=\log_e e=1$ なので，

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x\ln e}=\frac{1}{x} \ .$$

定理 3.1.4　定数 a について $a>0$ ，$a\neq 0$ とする．対数関数 $\log_a x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a} \quad (\ x>0\ ) \ .$$

特に自然対数の対数関数 $\ln x=\log_e x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x} \quad (\ x>0\ ) \ .$$

例　3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を $f(x)$ とおく：$f(x)=\log_3 x$ （ $x>0$ ）．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}\log_3 x=\dfrac{\log_3 e}{x}$ ．関数 $f(x)$ の 5 における微分係数は $f'(5)=\dfrac{\log_3 e}{5}$ ．　終

問題 3.1.4　5 を底とする対数関数 $\log_5 x$ を $f(x)$ とおく．関数 $f(x)$ の導関数を求めて，$f(x)$ の 7 における微分係数を求めよ．

関数 f について，変数 x の変化に対する $f(x)$ の変化を考える．x の値の変化量を x の増分 (increment) といい $\varDelta x$ [4] と書き表す．x の増分 $\varDelta x$ に対して，x が $x+\varDelta x$ に変化すると [5]，$f(x)$ は $f(x+\varDelta x)$ に変化する．このとき，$f(x)$ の変化量は $f(x+\varDelta x)-f(x)$ である [6]．これを，x の増分 $\varDelta x$ に対する $f(x)$ の増分といい，$\varDelta f(x)$ と書き表す：

$$\varDelta f(x)=f(x+\varDelta x)-f(x) \ .$$

$f(x)$ の増分 $\varDelta f(x)$ を x の増分 $\varDelta x$ で割ると

$$\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\varDelta x\to 0$ とする：

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x} \ .$$

変数 $\varDelta x$ を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ ;$$

これは関数 f の微分係数である：

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=\frac{d}{dx}f(x) \ .$$

変数 x, y 及び関数 f について $y=f(x)$ のとき，$\varDelta y=\varDelta f(x)$ なので，

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x} \ .$$

これを $\dfrac{dy}{dx}$ [7]，y' などと書き表すこともある結局，$y=f(x)$ のときは，

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x) \ .$$

――――　導関数の値の表記について

例えば関数 f を $f(x)=x^3$ とおく．このとき

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}x^3=3x^2 \ .$$

等式 $f'(x)=3x^2$ の両辺の x に 2 を代入すると $f'(2)=3\cdot 2^2=12$ ．しかし，$\dfrac{d}{dx}x^3$ の $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x で微分することを意味するので，この x に定数 2 を代入することはできない．そこで，関数 x^3 の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^3$ の $x=2$ のときの値を $\left(\dfrac{d}{dx}x^3\right)_{x=2}$ と書き表す．この記法によると，

$$f'(2)=\left(\frac{d}{dx}x^3\right)_{x=2}=\left(3x^2\right)_{x=2}=3\cdot 2^2=12 \ .$$

---

1) 関数 f の導関数の定義域は，通常，x において f が微分可能であるような実数 x の全体とする．

2) $\dfrac{d}{dx}$ は“ディー ディーエックス”という．

3) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ はこれでひとまとまりの表現であり，$\dfrac{d}{dx}$ だけでは意味がない

4) $\varDelta x$ はこれで一つの変数である．$\varDelta$ と x との積ではない．

5) x の増分といっても x の値が増加するとは限らない．$\varDelta x<0$ のとき x の値は減少する．

6) 変化量は“〔変化した後の量〕－〔変化する前の量〕”である

7) $\dfrac{dy}{dx}$ は“ディーワイ ディーエックス”と読む．$\dfrac{dy}{dx}$ はこれでひとまとまりの表現であり，分数ではない．