§2.3　関数の極限の性質

関数の極限に関する定理をいくつか述べる．それらの証明は省く．

> **定理 2.3.1**　関数 f と g 及び定数 a について，変数 x について $x\to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，
> $$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a}f(x)\right\}\pm\left\{\lim_{x\to a}g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）} ,$$
> $$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a}f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a}g(x)\right\} ;$$
> $x\to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ ならば，
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)} .$$

例　変数 x について $x\to 2$ のときの x^4+3^x の極限を調べる．冪関数 x^4 及び指数関数 3^x は連続なので，
$$\lim_{x\to 2}x^4 = 2^4 = 16 , \qquad \lim_{x\to 2}3^x = 3^2 = 9 .$$
よって，定理 2.3.1 より，
$$\lim_{x\to 2}(x^4+3^x) = \lim_{x\to 2}x^4+\lim_{x\to 2}3^x = 16+9 = 25 .$$
終

例　変数 x について $x\to 5$ のときの $x^2\log_3 x$ の極限を調べる．冪関数 x^2 及び対数関数 $\log_3 x$ は連続なので，
$$\lim_{x\to 5}x^2 = 5^2 = 25 , \qquad \lim_{x\to 5}\log_3 x = \log_3 5 .$$
よって，定理 2.3.1 より，
$$\lim_{x\to 5}(x^2\log_3 x) = \left(\lim_{x\to 5}x^2\right)\left(\lim_{x\to 5}\log_3 x\right) = 25\log_3 5 .$$
終

定理 2.3.1 より，例えば次のことが導かれる：変数 x と無関係な定数 a, k について，$\lim_{x\to a}k = k$ なので，関数 f について，$x\to a$ のとき $f(x)$ が収束するならば，
$$\lim_{x\to a}\{f(x)+k\} = \left\{\lim_{x\to a}f(x)\right\}+\lim_{x\to a}k = \left\{\lim_{x\to a}f(x)\right\}+k ,$$
$$\lim_{x\to a}\{k\,f(x)\} = \left(\lim_{x\to a}k\right)\lim_{x\to a}f(x) = k\lim_{x\to a}f(x) .$$

例解　変数 x について $x\to 3$ のときの $2x^2-5x+4$ の極限を調べる．冪関数 x^2，$x=x^1$ は連続なので，
$$\lim_{x\to 3}x^2 = 3^2 = 9 , \qquad \lim_{x\to 3}x = 3 .$$
よって
$$\lim_{x\to 3}(2x^2) = 2\lim_{x\to 3}x^2 = 2\cdot 9 = 18 , \qquad \lim_{x\to 3}(5x) = 5\lim_{x\to 3}x = 5\cdot 3 = 15 .$$
従って
$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4) = \lim_{x\to 3}(2x^2)-\lim_{x\to 3}(5x)-\lim_{x\to 3}4 = 18-15+4 = 7 .$$
このように，本来は，極限値 $\lim_{x\to 3}x^2$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to 3}(2x^2)$ を調べ，極限値 $\lim_{x\to 3}x$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to 3}(5x)$ を調べ，それから極限値 $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)$ を調べなければならない．しかしそのような記述を略して単に次のように計算することがある：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4) &= \lim_{x\to 3}(2x^2)-\lim_{x\to 3}(5x)+4 = 2\lim_{x\to 3}x^2-5\lim_{x\to 3}x+4\\ &= 2\cdot 3^2-5\cdot 3+4 = 7 .\end{aligned}$$
終

例解　変数 x について $x\to\frac{\pi}{3}$ のときの $\dfrac{5\sin x}{\cos x+2}$ の極限を調べる．三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は連続なので，
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} , \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$
よって，
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x) = 5\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x = 5\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} ,$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x+2) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x+2 = \frac{1}{2}+2 = \frac{5}{2} .$$
故に
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{5\sin x}{\cos x+2} = \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x+2)} = \frac{\;\frac{5\sqrt{3}}{2}\;}{\frac{5}{2}} = \sqrt{3} .$$
このように，本来は，極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)$ を調べ，極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x+2)$ を調べ，それから極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{5\sin x}{\cos x+2}$ を調べなければならない．しかしそのような記述を略して単に次のように計算することがある：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{5\sin x}{\cos x+2} &= \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x+2)} = \frac{5\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x+2} = \frac{5\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}+2} = \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+2}\\ &= \sqrt{3} .\end{aligned}$$
終

問題 2.3.1　変数 x について $x\to\frac{\pi}{6}$ のときの $\dfrac{\sin x}{3}-\sqrt{3}\cos x$ の極限を調べよ．

問題 2.3.2　変数 x について $x\to\sqrt{7}$ のときの $(x^2+1)\log_7 x$ の極限を調べよ．

> **定理 2.3.2**　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ があるとする．定数 a に対して，変数 x について $x\to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ において関数 g が連続であるならば，
> $$\lim_{x\to a}g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x\to a}f(x)\Big) .$$

例解　変数 x について $x\to 3$ のときの $\log_2(x^2+4)$ の極限を調べる．冪関数 x^2 は連続なので $\lim_{x\to 3}x^2 = 3^2 = 9$，よって $\lim_{x\to 3}(x^2+4) = \lim_{x\to 3}x^2+4 = 9+4 = 13$．対数関数 $\log_2 x$ は 13 において連続なので，定理 2.3.2 より，
$$\lim_{x\to 3}\log_2(x^2+4) = \log_2\left\{\lim_{x\to 3}(x^2+4)\right\} = \log_2 13 .$$
このように，本来は，まず極限値 $\lim_{x\to 3}x^2$ を調べ，次に極限値 $\lim_{x\to 4}(x^2+4)$ を調べ，それから極限値 $\lim_{x\to 4}\log_2(x^2+4)$ を調べなければならならない．しかしそのような記述を略して次のように計算することがある:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\log_2(x^2+4) &= \log_2\left\{\lim_{x\to 3}(x^2+4)\right\} = \log_2\left\{\lim_{x\to 3}(x^2+4)\right\} = \log_2(9+4)\\ &= \log_2 13 .\end{aligned}$$
終

例解　変数 x について $x\to 4$ のときの $\sqrt{3x-8}$ の極限を調べる．まず，$\lim_{x\to 4}(3x-8) = 3\cdot 4-8 = 4$．冪関数 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ は 4 において連続なので，
$$\lim_{x\to 4}\sqrt{3x-8} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(3x-8)} = \sqrt{4} = 2 .$$
このように，本来は，まず極限値 $\lim_{x\to 4}(3x-8)$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to 4}\sqrt{3x-8}$ を調べなければならない．しかしそのような記述を略して次のように計算することがある:
$$\lim_{x\to 4}\sqrt{3x-8} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(3x-8)} = \sqrt{3\cdot 4-8} = \sqrt{4} = 2 .$$
終

問題 2.3.3　変数 x について $t\to\frac{3}{2}$ のときの $\cos\dfrac{\pi t^2}{3}$ の極限を調べよ．

問題 2.3.4　変数 y について $y\to -1$ のときの $\tan^{-1}\sqrt{2y+5}$ の極限を調べよ．

> **定理 2.3.3**　変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x) = g(y)$ で，定数 a と b とについて，変数 x について $x\to a$ のとき $y\to b$，$y\neq b$ とする．$y\to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，
> $$\lim_{x\to a}f(x) = \lim_{y\to b}g(y) .$$

つまり，大雑把にいうと，変数 x と y とについて，$x\to a$ のとき $y\to b$ であるならば，$\lim_{x\to a}$ を $\lim_{y\to b}$ で置き換えることができる．