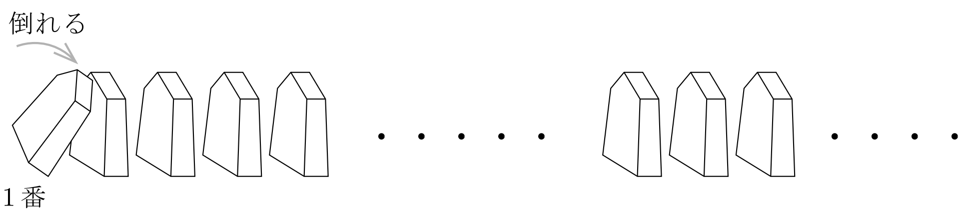
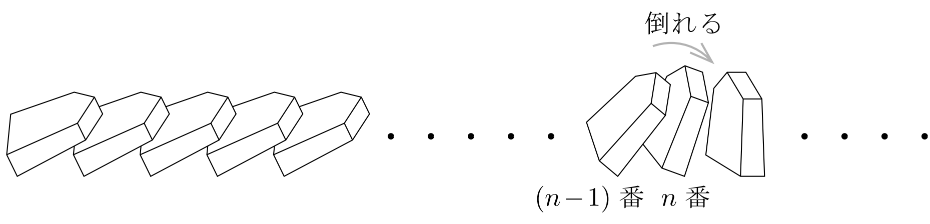
§1.6　数学的帰納法

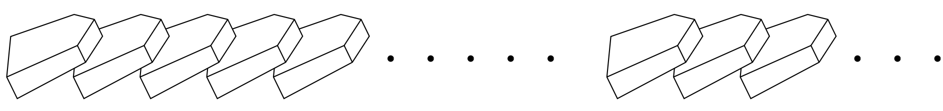
“将棋倒し”という言葉がある．将棋の駒を適当な間隔で一列に並べる．まず，1番めの駒が倒れるとする．



このとき，2番めの駒，3番めの駒，4番めの駒，$\cdots$ と順に倒れていく．2以上の自然数 n について，$(n-1)$ 番めの駒が倒れると必ず n 番めの駒も倒れるとする．



このとき，結局総ての駒が倒れる．



つまり，次の2つのことが成り立つとき総ての駒が倒れる：

(1)　1番めの駒が倒れる；

(2)　2以上の任意の自然数 n について，$(n-1)$ 番めの駒が倒れると次の n 番めの駒も倒れる．

数学においてこの将棋倒しに似た論法が使われる．

正の自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の2つのことが成り立つとする：

(1)　$\mathcal{P}(1)$ である；

(2)　2以上の任意の自然数 n について，$\mathcal{P}(n-1)$ であるならば $\mathcal{P}(n)$ である．

この2つのことから，次のようにして，$\mathcal{P}(2)$ であること，$\mathcal{P}(3)$ であること，$\mathcal{P}(4)$ であること，などが導かれる．

$\mathcal{P}(1)$ である（条件(1)）　　$\mathcal{P}(1)$ ならば $\mathcal{P}(2)$ である（条件(2)）

この2つから

$\mathcal{P}(2)$ である　　$\mathcal{P}(2)$ ならば $\mathcal{P}(3)$ である（条件(2)）

この2つから

$\mathcal{P}(3)$ である　　$\mathcal{P}(3)$ ならば $\mathcal{P}(4)$ である（条件(2)）

この2つから

$\mathcal{P}(4)$ である

以下同様にして，$\mathcal{P}(5)$ であること，$\mathcal{P}(6)$ であること，などが導かれる．結局，任意の正の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ であることになる．

このような推論法を**数学的帰納法**という．

法則（数学的帰納法）　正の自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の2つのことが成り立つとする：

(1)　$\mathcal{P}(1)$ である；

(2)　2以上の任意の自然数 n について，$\mathcal{P}(n-1)$ であるならば $\mathcal{P}(n)$ である．

このとき，正の任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ である．

$\boxed{\text{例題}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$ を次のように帰納的に定義する：$a_1=1$ で，2以上の任意の自然数 n について $a_n=a_{n-1}+2n-1$ ．次のことを示す：正の任意の自然数 n について $a_n=n^2$ ．

〔方針〕数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1)　等式 $a_n=n^2$ において $n=1$ とした等式 $a_1=1^2$ を示す；

(2)　2以上の任意の自然数 n について，漸化式 $a_n=a_{n-1}+2n-1$ を用いて，等式 $a_{n-1}=(n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n=n^2$ を導く．

〔解答〕

(1)　$a_1=1$ なので $a_1=1^2$ ．

(2)　2以上の自然数 n について，$a_n=a_{n-1}+2n-1$ なので，$a_{n-1}=(n-1)^2$ ならば

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+2n-1=(n-1)^2+2n-1=n^2-2n+1+2n-1\\&=n^2\ .\end{aligned}$$

故に，数学的帰納法により，正の任意の自然数 n について $a_n=n^2$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.6.1}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$ を次のように帰納的に定義する：$a_1=1$ で，2以上の任意の自然数 n について $a_n=a_{n-1}+3n^2-3n+1$ ．次のことを示せ：正の任意の自然数 n について $a_n=n^3$ ．

$\boxed{\text{問題 1.6.2}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$ を次のように帰納的に定義する：$a_1=4$ で，2以上の任意の自然数 n について $a_n=\dfrac{4a_{n-1}}{a_{n-1}+4}$ ．次のことを示せ：正の任意の自然数 n について $a_n=\dfrac{4}{n}$ ．

自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ であることを示すためには，0 から数学的帰納法を始める．

法則（数学的帰納法）　自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の2つのことが成り立つとする：

(1)　$\mathcal{P}(0)$ である；

(2)　正の任意の自然数 n について，$\mathcal{P}(n-1)$ であるならば $\mathcal{P}(n)$ である．

このとき，任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ である．

$\boxed{\text{例題}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq0}$ を次のように帰納的に定義する：$a_0=4$ で，正の任意の自然数 n について $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n>3$ ．

〔方針〕数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1)　不等式 $a_n>3$ において $n=0$ とした不等式 $a_0>3$ を示す；

(2)　正の任意の自然数 n について，不等式 $a_{n-1}>3$ を仮定して不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6}>3$ を導き，漸化式 $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ により不等式 $a_n>3$ を導く．

〔解答〕

(1)　$a_0=4$ なので $a_0>3$ ．

(2)　正の自然数 n について $a_{n-1}>3$ とする．

$$a_{n-1}+6>3+6=9\ ,$$
$$\sqrt{a_{n-1}+6}>\sqrt{9}=3\ ,$$

$a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ なので $a_n>3$ ．つまり，正の任意の自然数 n について，$a_{n-1}>3$ ならば $a_n>3$ ．

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して $a_n>3$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.6.3}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq0}$ を次のように帰納的に定義する：$a_0=7$ で，正の任意の自然数 n に対して $a_n=\sqrt{3a_{n-1}+10}$ ．次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n>5$ ．

1.4節において次のことを述べた：第0項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n\geq0}$ の公差が d であるとき，各自然数 n について $a_n=a_0+dn$ ．このことを数学的帰納法により証明する．

証明　第0項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n\geq0}$ の公差が d であるとする．

$d\cdot0=0$ なので $a_0=a_0+d\cdot0$ ．

正の任意の自然数 n について，$a_n=a_{n-1}+d$ なので，$a_{n-1}=a_0+d(n-1)$ ならば

$$a_n=a_{n-1}+d=a_0+d(n-1)+d=a_0+dn\ .$$

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 n について $a_n=a_0+dn$ ．

（証明終り）

1.5節において次のことを述べた：第0項から始まる等比数列 $\{a_n\}_{n\geq0}$ の公比が r であるとき，各自然数 n について $a_n=a_0r^n$ ．このことを数学的帰納法により証明する．

証明　第0項から始まる等比数列 $\{a_n\}_{n\geq0}$ の公比が r であるとする．

$r^0=1$ なので $a_0=a_0r^0$ ．

正の任意の自然数 n について，$a_n=a_{n-1}r$ なので，$a_{n-1}=a_0r^{n-1}$ ならば

$$a_n=a_{n-1}r=a_0r^{n-1}r=a_0r^n\ .$$

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 n について $a_n=a_0r^n$ ．

（証明終り）

なお，数学的帰納法は帰納法ではなくて演繹法である．