§0.5　指数の拡張と冪関数

実数 a 及び自然数 n に対し，a の n 個の積を a の n 乗といい，a^n と書き表す：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の積}}\ ;$$

特に，$n=0$ のときは $a^0=1$ と約束する．これらを a の**冪** (power) という．a の n 乗の式 a^n において，a を**底** (base) といい，n を**指数** (exponent) という．実数 x に指数が n である x の冪 x^n を対応させる関数を，指数が n である**冪関数** (power function) という．

冪における指数をまず整数の範囲にまで広げる．

定義　0 以外の数 a 及び正の自然数 n に対して，a の $-n$ 乗 a^n を $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ と定義する．

整数指数の指数法則が成り立つ．

定理 0.5.1（整数指数の指数法則）　0 以外の任意の数 a, b 及び任意の整数 m, n について，

$$a^m a^n = a^{m+n}\ ,\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ ,\qquad (a^m)^n = a^{mn}\ ;$$
$$(ab)^n = a^n b^n\ ,\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ .$$

更に，冪における指数を有理数の範囲にまで広げる．

定数 n を正の奇数とする．各実数 y に対して $y=x^n$ である実数 x が唯一つある．従って，定理 0.3.3 より，実数全体を定義域とする冪関数 x^n の逆関数がある．実数全体を定義域とする冪関数 x^n の値域は実数全体なので，その逆関数の定義域は実数全体である．実数全体を定義域とする冪関数 x^n の逆関数の実数 x における値を $\sqrt[n]{x}$ と書き表す．

定数 n を正の偶数とする．0 以上の各実数 y に対して $y=x^n$ である 0 以上の実数 x が唯一つある．従って，定理 0.3.3 より，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^n の逆関数がある．区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^n の値域は区間 $[0,\infty)$ なので，その逆関数の定義域は区間 $[0,\infty)$ である．区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^n の逆関数の 0 以上の実数 x における値を $\sqrt[n]{x}$ と書き表す．

定義　実数 a について $a \geq 0$ とする．整数 m と正の整数 n に対して，a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ と定義する；但し，$m<0$ のときは $a>0$ とする．

定理 0.5.2　任意の正の実数 a 及び任意の整数 m と任意の正の整数 n とについて，

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}\ .$$

更に，任意の実数 p 及び任意の正の実数 a に対して a の p 乗 a^p の値が定まる．そして指数法則も同じ形の等式が成り立つ．

定理 0.5.3（実数指数の指数法則）　任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について，

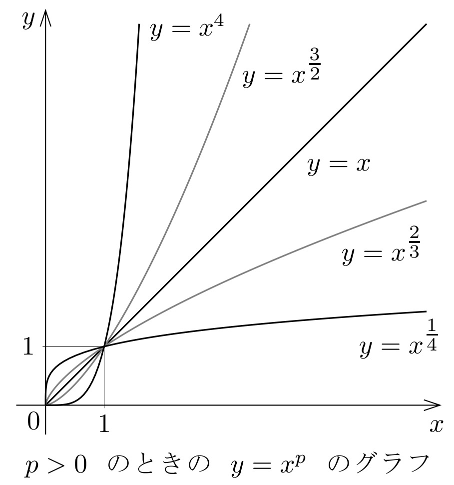
$$a^p a^q = a^{p+q}\ ,\qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}\ ,\qquad (a^p)^q = a^{pq}\ ;$$
$$(ab)^p = a^p b^p\ ,\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}\ .$$

指数法則から次のことが成り立つ：正の実数 a, b 及び任意の実数 p について，

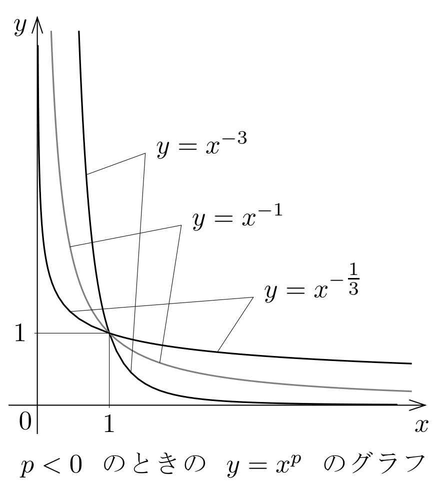
$$a^{-p} = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^p} = \frac{1}{a^p}\ .$$

定数 p が実数のとき，正の実数 x に x の冪 x^p を対応させる関数が定義できる．この関数 x^p を，指数が n である**冪関数** (power function) という．

定数 p は実数で $p \neq 0$ のとき，冪関数 x^p（ $p>0$ のときは $x \geq 0$ ，$p<0$ のときは $x>0$ ）のグラフは次のようになる．



$p>0$ のときの $y=x^p$ のグラフ



$p<0$ のときの $y=x^p$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立つ．

定理 0.5.4　定数 p は実数で $p \neq 0$ とする．

$p>0$ のとき，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調増加である．

$p<0$ のとき，区間 $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調減少である．

冪関数の逆関数について次の定理が成り立ちます．

定理 0.5.5　定数 p は実数で $p \neq 0$ とする．区間 $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は，$(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である．