§0.3　逆関数

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y=f(x)$ とする． f によって，x の値に対して y の値が唯一つ定まる． 逆に，y の値に対して x の値が唯一つ定まるとき，y の値に対して x の値を定める関数ができる． この関数を f の**逆関数** (inverse function) という．

定義　関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つであるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す． 関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

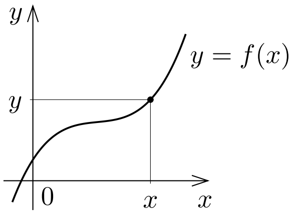
定理 0.3.1　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ について } \; g\bigl(f(x)\bigr)=x \;,$$
$$g \text{ の定義域の任意の要素 } y \text{ について } \; f\bigl(g(y)\bigr)=y \;.$$

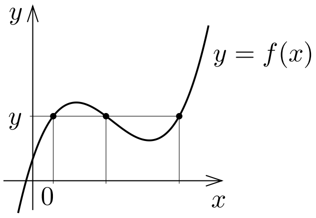
定理 0.3.2　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，f の定義域の任意の要素 x 及び g の定義域の任意の要素 y について

$$f(x)=y \iff g(y)=x \;.$$

定理 0.3.3　関数 f の値域の各要素 y に対して $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の値域の各要素 y に $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x を対応させる関数は f の逆関数である．



$f(x)=y$ となる x の値が唯一つだけあるので，関数 f の逆関数がある．



関数 f の逆関数はない． $f(x)=y$ となる x の値が 2 つ以上ある．

定理 0.3.4　関数 f に対して，f の逆関数はあるとしても唯一つだけである．

関数 f の逆関数があるとき，f の逆関数を f^{-1} と書き表す．

定理 0.3.5　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，f^{-1} の定義域は f の値域であり，f^{-1} の値域は f の定義域である．

定理 0.3.6　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，f は g の逆関数である．

逆関数のグラフについて次の定理が成り立つ．

定理 0.3.6　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，xy 座標平面において，$y=f^{-1}(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．