§6.4　複数の不等式で表される領域

複数の不等式に対して，各々の不等式が表す条件を“かつ”で結んだ条件を考えるとき，それらの不等式を連立するといいます．

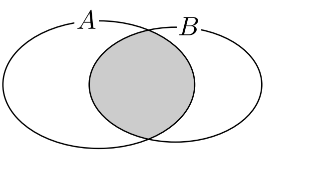
$\boxed{例}$　変数 x と y とに関する不等式 $3x-y\leq 7$ と $x-2y\geq -1$ との連立不等式を次のように書き表します：

$$\begin{cases}3x-y\leq 7\\ x-2y\geq -1\end{cases}$$

この連立不等式は x の値と y の値とに関する条件“$3x-y\leq 7$ かつ $x-2y\geq -1$”を表します．　$\boxed{終}$

集合 A と集合 B との両方に属すものの全体を A と B との共通部分といい，$A\cap B$ と書き表しました：

$$A\cap B=\{\,x\mid x\in A \text{ かつ } x\in B\,\}\,.$$



A と B との共通部分 $A\cap B$ の“感じ”を図で表すと右図の網掛けの部分のようになります．

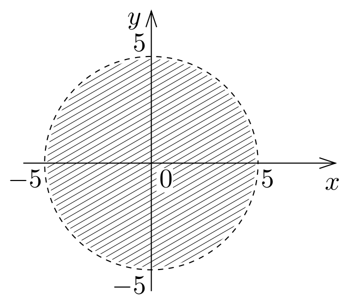
$\boxed{例解}$　xy 座標平面において不等式 $x^2+y^2<25$ と $(x-3)^2+y^2<16$ の連立不等式が表す領域を考えます．　不等式 $x^2+y^2<25$ が表す領域を A とおき，不等式 $(x-3)^2+y^2<16$ が表す領域を B とおきます：

$$A=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<25\,\}\,,\qquad B=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid (x-3)^2+y^2<16\,\}\,.$$

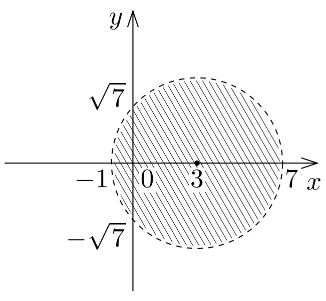
このとき，A と B との共通集合 $A\cap B$ は，

$$A\cap B=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<25 \text{ かつ } (x-3)^2+y^2<16\,\}\,.$$

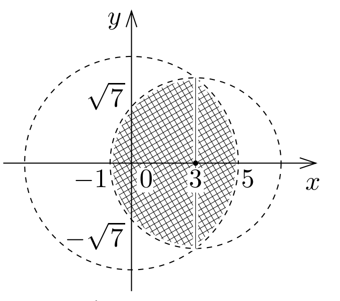
これより，不等式 $x^2+y^2<25$ と $(x-3)^2+y^2<16$ の連立で表される領域は，不等式 $x^2+y^2<25$ が表す領域 A と不等式 $(x-3)^2+y^2<16$ が表す領域 B との共通部分 $A\cap B$，つまり領域 A と B との両方に属す点の全体ですから，次のようになります．



領域 $x^2+y^2<25$
（境界を含まない）



領域 $(x-3)^2+y^2<16$
（境界を含まない）



領域 $\begin{cases}x^2+y^2<25\\(x-3)^2+y^2<16\end{cases}$
（境界を含まない）　$\boxed{終}$

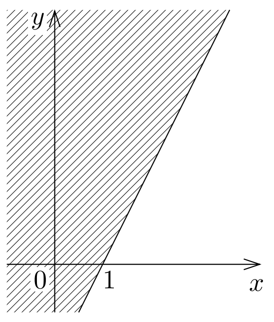
$\boxed{例解}$　xy 座標平面において不等式 $2x-y\leq 2$ と $x-3y\geq -9$ との連立不等式が表す領域を図示します．　不等式 $2x-y\leq 2$ が表す領域を A とおき，不等式 $x-3y\geq -9$ が表す領域を B とおきます：

$$A=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 2x-y\leq 2\,\}\,,\qquad B=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x-3y\geq -9\,\}\,.$$

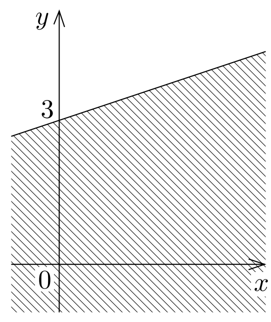
このとき，A と B との共通集合 $A\cap B$ は，

$$A\cap B=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 2x-y\leq 2 \text{ かつ } x-3y\geq -9\,\}\,.$$

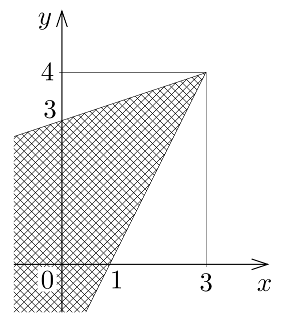
これより，不等式 $2x-y\leq 2$ と $x-3y\geq -9$ との連立不等式が表す領域は，不等式 $2x-y\leq 2$ つまり $y\geq 2x-2$ が表す領域 A と不等式 $x-3y\geq -9$ つまり $y\leq\dfrac{x}{3}+3$ が表す領域 B と共通部分 $A\cap B$，つまり A と B との両方に属す点の全体ですから，次のようになります．



領域 $2x-y\leq 2$
（境界を含む）



領域 $x-3y\geq -9$
（境界を含む）



領域 $\begin{cases}2x-y\leq 2\\x-3y\geq -9\end{cases}$
（境界を含む）　$\boxed{終}$

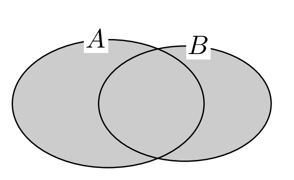
$\boxed{問題 6.4.1}$　xy 座標平面において不等式 $3x+y<15$ と $x-2y>-2$ との連立不等式が表す領域を図示しなさい．

$\boxed{問題 6.4.2}$　xy 座標平面において連立不等式 $x^2-6x-7\leq 4y\leq x+1$ が表す領域を図示しなさい．

$\boxed{問題 6.4.3}$　xy 座標平面において不等式 $(x+2)^2+(y-1)^2\geq 9$ と $x^2+y^2\leq 36$ との連立不等式が表す領域を図示しなさい．

集合 A か集合 B かの少なくともどちらかに属す対象の全体を A と B との**合併集合**あるいは和集合といい，$A\cup B$ と書き表しました：

$$A\cup B=\{\,x\mid x\in A \text{ または } x\in B\,\}\,.$$



集合 A と集合 B との合併集合 $A\cup B$ の“感じ”を図で表すと右上図の網掛けの部分のようになります．

次の定理が成り立ちます：各実数 a,b について，

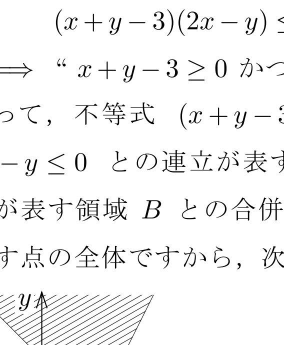
$$\begin{aligned}
ab>0 &\iff \text{“}a>0 \text{ かつ } b>0\text{” または “}a<0 \text{ かつ } b<0\text{”}\,,\\
ab\geq 0 &\iff \text{“}a\geq 0 \text{ かつ } b\geq 0\text{” または “}a\leq 0 \text{ かつ } b\leq 0\text{”}\,,\\
ab<0 &\iff \text{“}a>0 \text{ かつ } b<0\text{” または “}a<0 \text{ かつ } b>0\text{”}\,,\\
ab\leq 0 &\iff \text{“}a\geq 0 \text{ かつ } b\leq 0\text{” または “}a\leq 0 \text{ かつ } b\geq 0\text{”}\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{例解}$　xy 座標平面において不等式 $(x+y-3)(2x-y)\leq 0$ が表す領域を考える．　各実数 x,y について，

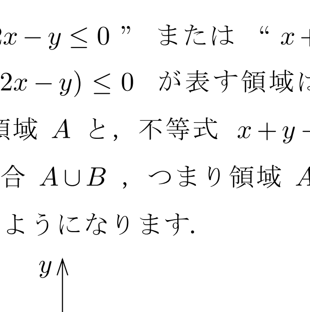
$$(x+y-3)(2x-y)\leq 0$$

$\iff$“$x+y-3\geq 0$ かつ $2x-y\leq 0$” または “$x+y-3\leq 0$ かつ $2x-y\geq 0$”．

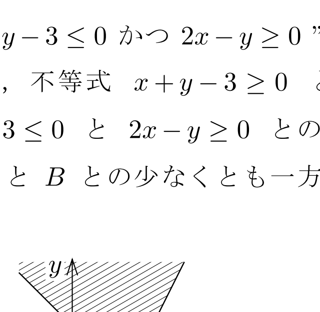
従って，不等式 $(x+y-3)(2x-y)\leq 0$ が表す領域は，不等式 $x+y-3\geq 0$ と $2x-y\leq 0$ との連立が表す領域 A と，不等式 $x+y-3\leq 0$ と $2x-y\geq 0$ との連立が表す領域 B との合併集合 $A\cup B$，つまり領域 A と B との少なくとも一方に属す点の全体ですから，次のようになります．



領域 $\begin{cases}x+y-3\geq 0\\2x-y\leq 0\end{cases}$
（境界を含む）



領域 $\begin{cases}x+y-3\leq 0\\2x-y\geq 0\end{cases}$
（境界を含む）



領域 $(x+y-3)(2x-y)\leq 0$
（境界を含む）　$\boxed{終}$

$\boxed{問題 6.4.4}$　xy 座標平面において不等式 $(2x+3y-18)(2x-y-2)\geq 0$ が表す領域を図示しなさい．