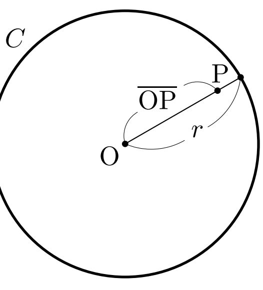
§6.3　円を境界とする領域

xy 座標平面において，点 O を中心として正の実数 r を半径とする円を C とおきます．点 P について，

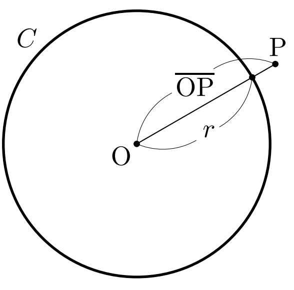
$$\text{P が } C \text{ に属す} \iff \overline{\mathrm{OP}} = r \quad .$$

座標平面において円 C の内側と外側とがあります．次のことが成り立ちます:

$$\text{P が } C \text{ の内側にある} \iff \overline{\mathrm{OP}} < r \quad ;$$
$$\text{P が } C \text{ の外側にある} \iff \overline{\mathrm{OP}} > r \quad .$$



$\overline{\mathrm{OP}} < r$ のとき



$\overline{\mathrm{OP}} > r$ のとき

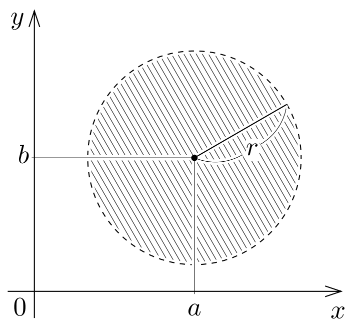
定数 a, b に対して　$\mathrm{O} = (a, b)$　とし，変数 x, y に対して　$\mathrm{P} = (x, y)$　とします．
$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ ．$\overline{\mathrm{OP}} \geq 0$　かつ　$r > 0$　なので，

$$\overline{\mathrm{OP}} < r \iff \overline{\mathrm{OP}}^2 < r^2 \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \ ,$$
$$\overline{\mathrm{OP}} > r \iff \overline{\mathrm{OP}}^2 > r^2 \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2 \ ,$$

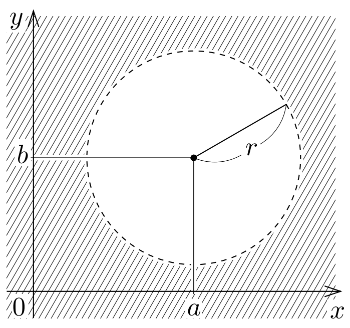
これらのことより，

$$\text{点 } (x, y) \text{ が } C \text{ の内側にある} \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \quad ,$$
$$\text{点 } (x, y) \text{ が } C \text{ の外側にある} \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2 \quad .$$

これより次のようになります：
- 不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$　が表す領域は円 C の内側の全体である；
- 不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$　が表す領域は円 C の外側の全体である．

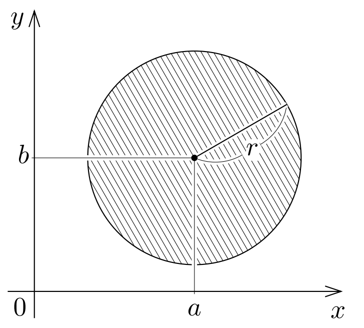


領域　$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$
（境界を含まない）

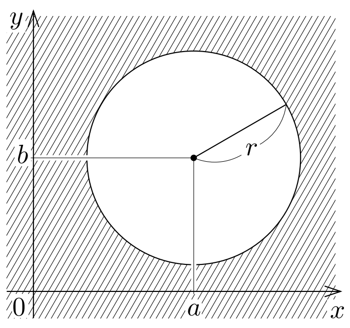


領域　$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$
（境界を含まない）

更に，方程式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$　が表す図形は円 C ですから，次のようになります：
- 方程式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$　と不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$　とを併せた不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$　が表す領域は円 C とその内側とを併せた全体である;
- 方程式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$　と不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$　とを併せた不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$　が表す領域は円 C とその外側とを併せた全体である．



領域　$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$
（境界を含む）



領域　$(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$
（境界を含む）

このようにして次の定理が示せます．

定理 6.3.1　定数 a, b, r は実数で　$r > 0$　とする．xy 座標平面において以下のことが成り立つ：

(1)　不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$　が表す領域は点 (a, b) を中心とする半径 r の円の内側の全体である；この領域は境界を含まない．

(2)　不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$　が表す領域は点 (a, b) を中心とする半径 r の円の外側の全体である；この領域は境界を含まない．

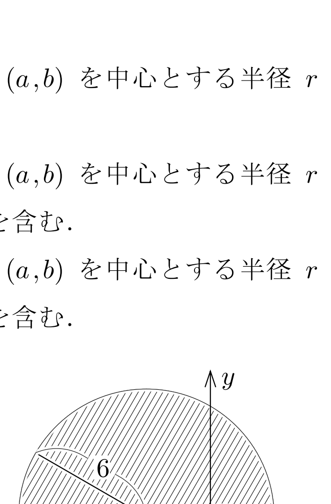
(3)　不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$　が表す領域は点 (a, b) を中心とする半径 r の円とその内側とを併せた全体である；この領域は境界を含む．

(4)　不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$　が表す領域は点 (a, b) を中心とする半径 r の円とその外側とを併せた全体である；この領域は境界を含む．

例題　xy 座標平面において不等式　$x^2 + y^2 + 6x - 8y \leq 11$　が表す領域を図示する．

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y \leq 11$$
$$\iff x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \leq 11 + 9 + 16$$
$$\iff (x+3)^2 + (y-4)^2 \leq 36 \ .$$

不等式　$x^2 + y^2 + 6x - 8y \leq 11$　が表す領域は，点 $(-3, 4)$ を中心とする半径が　6　である円とその内側とを併せた全体である．

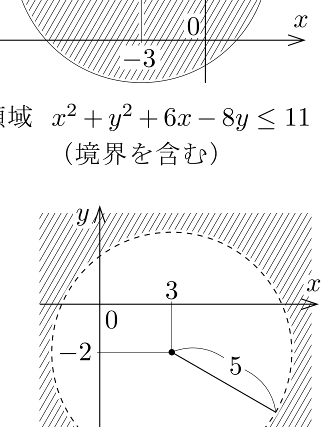


領域　$x^2 + y^2 + 6x - 8y \leq 11$
（境界を含む）　終

例題　xy 座標平面において不等式　$x^2 + y^2 > 6x - 4y + 12$　が表す領域を図示する．

$$x^2 + y^2 > 6x - 4y + 12$$
$$\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 > 12 + 9 + 4$$
$$\iff (x-3)^2 + (y+2)^2 > 25 \ .$$

不等式　$x^2 + y^2 - 6x + 4y > 12$　が表す領域は，点 $(3, -2)$ を中心とする半径が　5　である円の外側の全体である．



領域　$x^2 + y^2 - 6x + 4y > 12$
（境界を含まない）　終

問題 6.3.1　xy 座標平面において不等式　$x^2 + y^2 < 10x - 6y + 15$　が表す領域を図示しなさい．

問題 6.3.2　xy 座標平面において不等式　$x^2 + y^2 \geq 5 - 8x + 4y$　が表す領域を図示しなさい．

楕円を境界とする領域についても同様の定理が成り立ちます．

定理 6.3.2　定数 a, b は実数で　$a > 0$ ，$b > 0$　とする．xy 座標平面において以下のことが成り立つ．

(1)　不等式　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1$　が表す領域は方程式　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　が表す楕円の内側の全体である；この領域は境界を含まない．

(2)　不等式　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1$　が表す領域は方程式　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　が表す楕円の外側の全体である；この領域は境界を含まない．

(3)　不等式　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$　が表す領域は方程式　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　が表す楕円とその内側とを併せた全体である；この領域は境界を含む．

(4)　不等式　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \geq 1$　が表す領域は方程式　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　が表す楕円とその外側とを併せた全体である；この領域は境界を含む．