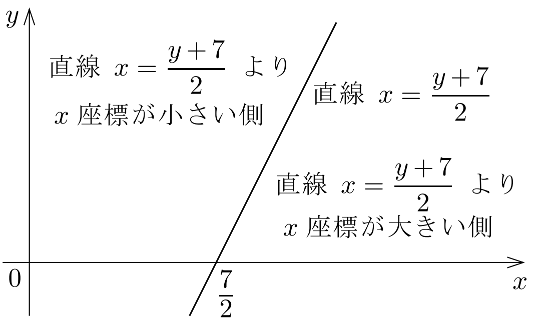
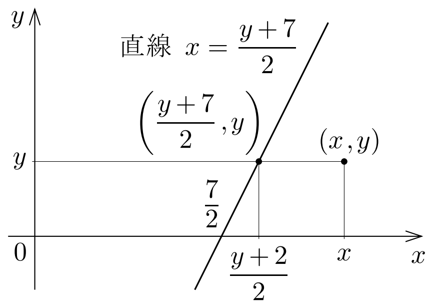
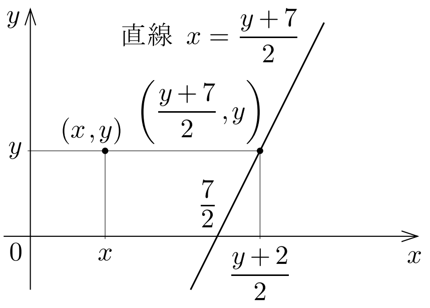
§6.2　関数のグラフを境界とする領域

$\boxed{\text{例解}}$　xy 座標平面において，方程式 $x=\dfrac{y+7}{2}$ で表される直線より x 座標が大きい側と x 座標が小さい側とがあります．各実数 x と y とについて，点 (x,y) が直線 $x=\dfrac{y+7}{2}$ より x 座標が大きい側にあるか x 座標が小さい側にあるかを考えます．





$x>\dfrac{y+7}{2}$ のとき



$x<\dfrac{y+7}{2}$ のとき

これらの図から分かるように次のことが成り立ちます:

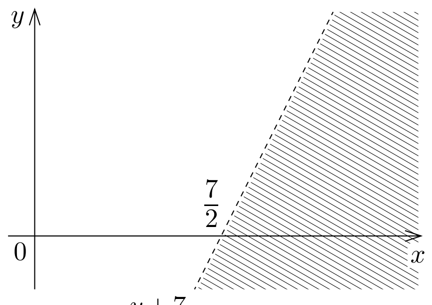
$$x>\frac{y+7}{2} \iff \text{点 } (x,y) \text{ は直線 } x=\frac{y+7}{3} \text{ より } x \text{ 座標が大きい側にある；}$$

$$x<\frac{y+7}{2} \iff \text{点 } (x,y) \text{ は直線 } x=\frac{y+7}{3} \text{ より } x \text{ 座標が小さい側にある．}$$

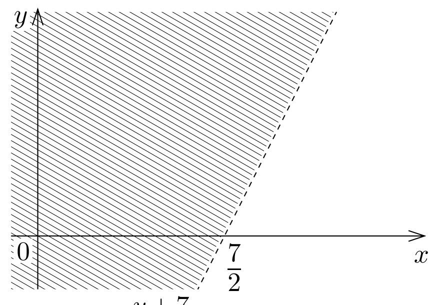
このことより次のようになります：

・ 不等式 $x>\dfrac{y+7}{2}$ が表す領域は直線 $x=\dfrac{y+7}{2}$ より x 座標が大きい側の全体である；

・ 不等式 $x<\dfrac{y+7}{2}$ が表す領域は直線 $x=\dfrac{y+7}{2}$ より x 座標が小さい側の全体である．



領域 $x>\dfrac{y+7}{2}$（境界を含まない）

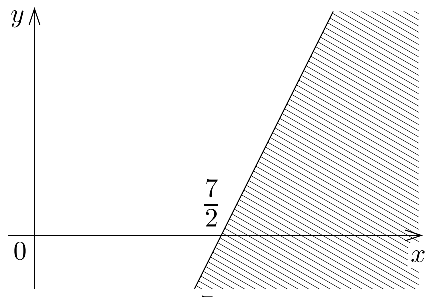


領域 $x<\dfrac{y+7}{2}$（境界を含まない）

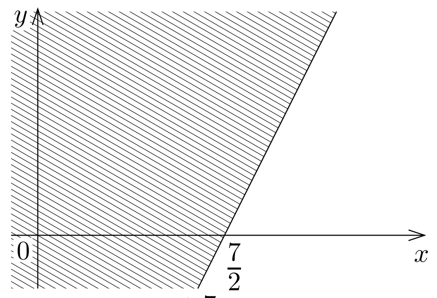
更に次のようになります：

・ 方程式 $x=\dfrac{y+7}{2}$ と不等式 $x>\dfrac{y+7}{2}$ とを併せた不等式 $x\geq\dfrac{y+7}{2}$ が表す領域は直線 $x=\dfrac{y+7}{2}$ とそれより x 座標が大きい側とを併せた全体である；

・ 方程式 $x=\dfrac{y+7}{2}$ と不等式 $x>\dfrac{y+7}{2}$ とを併せた不等式 $x\leq\dfrac{y+7}{2}$ が表す領域は直線 $x=\dfrac{y+7}{2}$ とそれより x 座標が小さい側とを併せた全体である．



領域 $x\geq\dfrac{y+7}{2}$（境界を含む）



領域 $x\leq\dfrac{y+7}{2}$（境界を含む）

$\boxed{\text{終}}$

一般的に述べると次の定理になります．

定理 6.2　関数 f に対して，xy 座標平面において方程式 $x=f(y)$ が表す図形について以下のことが成り立つ．

(1)　不等式 $x>f(y)$ が表す領域は方程式 $x=f(y)$ が表す曲線より x 座標が大きい側の図形である；この領域は境界を含まない．

(2)　不等式 $x<f(y)$ が表す領域は方程式 $x=f(y)$ が表す曲線より x 座標が小さい側の図形である；この領域は境界を含まない．

(3)　不等式 $x\geq f(y)$ が表す領域は方程式 $x=f(y)$ が表す曲線とそれより x 座標が大きい側とを併せた図形である；この領域は境界を含む．

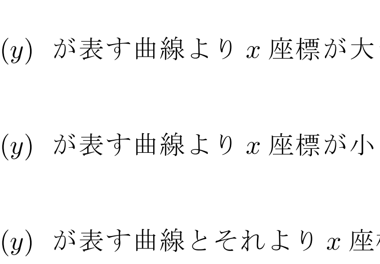
(4)　不等式 $x\leq f(y)$ が表す領域は方程式 $x=f(y)$ が表す曲線とそれより x 座標が小さい側とを併せた図形である；この領域は境界を含む．

xy 座標平面では，通常は x 軸を右向きにします；このとき，x 座標が大きい側とは右側のことになり，x 座標が小さい側とは左側ことになります．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において不等式 $y^2-2x-8y\leq -12$ が表す領域を図示する．

$$\begin{aligned}
&y^2-2x-8y\leq -12\\
\iff\ &2x\geq y^2-8y+12\\
\iff\ &2x\geq (y-4)^2-4\\
\iff\ &x\geq \frac{1}{2}(y-4)^2-2\ .
\end{aligned}$$

不等式 $y^2-2x-8y\leq -12$ が表す領域は，方程式 $x=\dfrac{1}{2}(y-4)^2-2$ が表す放物線とそれより x 座標が大きい側とを併せた全体である．



領域 $y^2-2x-8y\leq -12$

（境界を含む）

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.2.1}}$　xy 座標平面において不等式 $y^2-4x+6y+5>0$ が表す領域を図示しなさい．

$\boxed{\text{問題 6.2.2}}$　xy 座標平面において不等式 $y^2+2x-6y+5\leq 0$ が表す領域を図示しなさい．