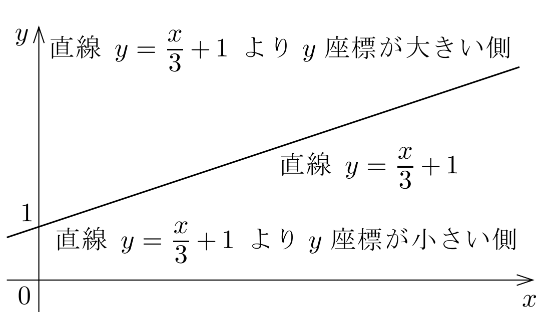
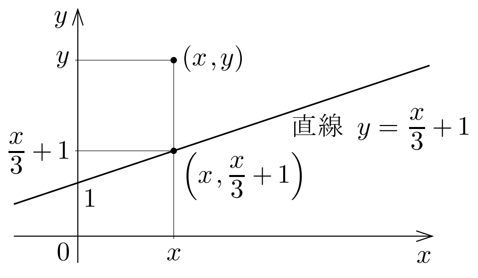
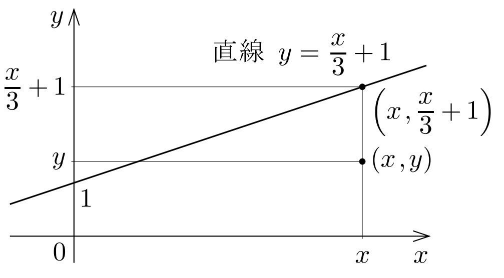
§6.1　関数のグラフを境界とする領域



例解　xy 座標平面において，方程式 $y=\dfrac{x}{3}+1$ で表される直線より y 座標が大きい側と y 座標が小さい側とがあります． 各実数 x と y とについて，点 (x,y) が直線 $y=\dfrac{x}{3}+1$ より y 座標が大きい側にあるか y 座標が小さい側にあるかを考えます．



$y>\dfrac{x}{3}+1$ のとき



$y<\dfrac{x}{3}+1$ のとき

これらの図から分かるように次のことが成り立ちます:

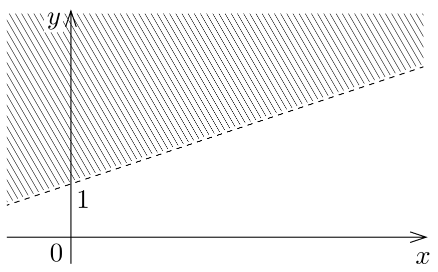
$y>\dfrac{x}{3}+1 \iff$ 点 (x,y) は直線 $y=\dfrac{x}{3}+1$ より y 座標が大きい側にある；

$y<\dfrac{x}{3}+1 \iff$ 点 (x,y) は直線 $y=\dfrac{x}{3}+1$ より y 座標が小さい側にある．

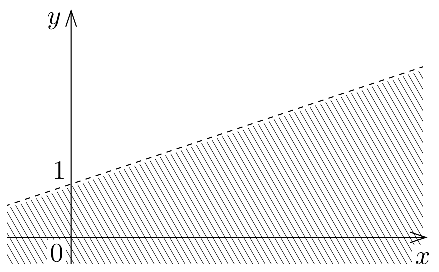
このことより次のようになります：

・ 不等式 $y>\dfrac{x}{3}+1$ が表す領域は直線 $y=\dfrac{x}{3}+1$ より y 座標が大きい側の全体である；

・ 不等式 $y<\dfrac{x}{3}+1$ が表す領域は直線 $y=\dfrac{x}{3}+1$ より y 座標が小さい側の全体である．



領域 $y>\dfrac{x}{3}+1$（境界を含まない）

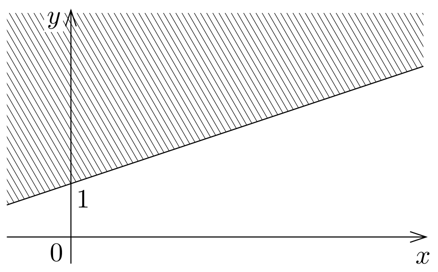


領域 $y<\dfrac{x}{3}+1$（境界を含まない）

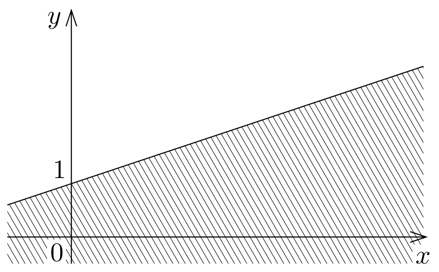
更に次のようになります：

・ 方程式 $y=\dfrac{x}{3}+1$ と不等式 $y>\dfrac{x}{3}+1$ とを併せた不等式 $y\geq\dfrac{x}{3}+1$ が表す領域は直線 $y=\dfrac{x}{3}+1$ とそれより y 座標が大きい側とを併せた全体である；

・ 方程式 $y=\dfrac{x}{3}+1$ と不等式 $y<\dfrac{x}{3}+1$ とを併せた不等式 $y\leq\dfrac{x}{3}+1$ が表す領域は直線 $y=\dfrac{x}{3}+1$ とそれより y 座標が小さい側とを併せた全体である



領域 $y\geq\dfrac{x}{3}+1$（境界を含む）



領域 $y\leq\dfrac{x}{3}+1$（境界を含む）

終

一般的に述べると次の定理になります．

定理 6.1　関数 f に対して，xy 座標平面において方程式 $y=f(x)$ が表す図形について以下のことが成り立つ．

(1) 不等式 $y>f(x)$ が表す領域は方程式 $y=f(x)$ が表す曲線より y 座標が大きい側の全体である；この領域は境界を含まない．

(2) 不等式 $y<f(x)$ が表す領域は方程式 $y=f(x)$ が表す曲線より y 座標が小さい側の全体である；この領域は境界を含まない．

(3) 不等式 $y\geq f(x)$ が表す領域は方程式 $y=f(x)$ が表す曲線とそれより y 座標が大きい側とを併せた全体である；この領域は境界を含む．

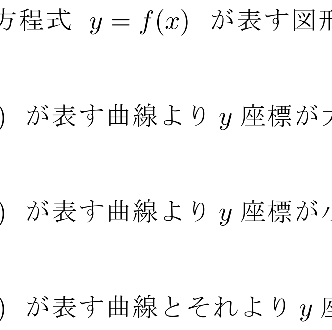
(4) 不等式 $y\leq f(x)$ が表す領域は方程式 $y=f(x)$ が表す曲線とそれより y 座標が小さい側とを併せた全体である；この領域は境界を含む．

xy 座標平面では，通常は y 軸を上向きにします；このとき，y 座標が大きい側とは上側のことになり，y 座標が小さい側とは下側ことになります．

例題　xy 座標平面において不等式 $3x-2y\geq 6$ が表す領域を図示する．

$$3x-2y\geq 6 \iff 2y\leq 3x-6 \iff y\leq\frac{3}{2}x-3\ .$$

方程式 $y=\dfrac{3}{2}x-3$ が表す直線とそれより y 座標が小さい側とを併せた全体である．

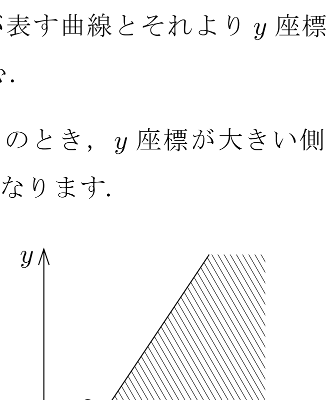


領域 $3x-2y\geq 6$（境界を含む）　終

例題　xy 座標平面において不等式 $x^2-6x-2y<-5$ が表す領域を図示する．

$$x^2-6x-2y<-5 \iff 2y>x^2-6x+5 \iff 2y>(x-3)^2-4 \iff y>\frac{1}{2}(x-3)^2-2\ .$$

不等式 $x^2-6y-2y<-5$ が表す領域は，方程式 $y=\dfrac{1}{2}(x-3)^2-2$ が表す放物線より y 座標が大きい側の全体である．



領域 $y>x^2-6x+5$
（境界を含まない）

終

問題 6.1.1　xy 座標平面において不等式 $2x+3y+12>0$ が表す領域を図示しなさい．

問題 6.1.2　xy 座標平面において不等式 $x^2\geq 4x+3y+5$ が表す領域を図示しなさい．