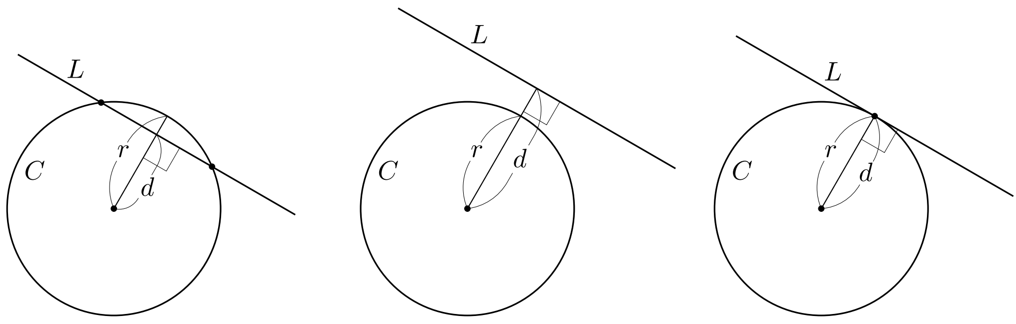
第5章の補遺1　円と直線

座標平面における円 C と直線 L とについて，正の実数 r が C の半径であり，正の実数 d が C と L との間の距離であるとき，次の3つの場合があります．



$d<r$ のとき　C と L との共有点は2個　　$d>r$ のとき　C と L との共有点は無い　　$d=r$ のとき　C と L との共有点は1個

定数 a,b,c について $a\neq 0$ または $b\neq 0$ とします． xy 座標平面において，方程式 $ax+by+c=0$ が表す直線を L とおきます． また，実数 p,q に対して，点 (p,q) が円 C の中心であるとします． 定理3.7より $d=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ． これより，

$$C \text{ と } L \text{ との異なる2個の共有点がある} \iff d<r \iff \frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<r \quad ,$$

$$C \text{ と } L \text{ との共有点が無い} \iff d>r \iff \frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}>r \quad ,$$

$$C \text{ と } L \text{ とが接する} \iff d=r \iff \frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r \quad .$$

共有点が1個ある場合は，C を表す方程式と L を表す方程式との連立方程式の解が重解なので，定理5.2.2より，L は C の接線です．

例題　xy 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(-2,1)$ を中心とする半径が 2 である円 C の接線 L の傾きが 3 であるとする． L を表す方程式を求める．

〔解答〕 円 C の中心と接線 L との間の距離は C の半径 2 である． 接線 L の傾きが 3 であるので，L は方程式 $y=3x+c$（c は定数）つまり $3x-y+c=0$ で表される． よって C の中心 $(-2,1)$ と L との間の距離は $\dfrac{|3\cdot(-2)-1+c|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|c-7|}{\sqrt{10}}$ である． これの値が 2 なので， $\dfrac{|c-7|}{\sqrt{10}}=2$ ， $|c-7|=2\sqrt{10}$ ， $c-7=\pm2\sqrt{10}$ ， $c=7\pm2\sqrt{10}$ ． 接線 L は，方程式 $y=3x+7+2\sqrt{10}$ で表される直線であるか，または，方程式 $y=3x+7-2\sqrt{10}$ で表される直線である．

〔別解〕 C と L との接点を $\mathrm{P}=(p,q)$（p,q は実数）とおく． 接線 L の傾きが 3 であるので，L は方程式 $y=3x+c$（c は定数）で表される． 接点 $\mathrm{P}=(p,q)$ は接線 L に属すので $q=3p+c$ ，接点 $\mathrm{P}=(p,q)$ は円 C に属すので，$\overline{\mathrm{AP}}=2$ ， $\overline{\mathrm{AP}}^2=4$ ， $(p+2)^2+(q-1)^2=4$ ． 点 $\mathrm{P}=(p,q)$ が接点である条件は，p,q に関する連立方程式

$$q=3p+c \quad \text{かつ} \quad (p+2)^2+(q-1)^2=4$$

の解が重解であることである． $q=3p+c$ を $(p+1)^2+(q-1)^2=4$ に代入すると，

$$(p+1)^2+(3p+c-1)^2=4 \ ,$$
$$10p^2+2(3c-1)p+c^2-2c+1=0 \ .$$

この p に関する2次方程式について解が重解である条件は，判別式の値が 0 であることなので，

$$\{2(3c-1)\}^2-4\cdot10\cdot(c^2-2c+1)=0 \ ,$$

整理すると $c^2-14c+9=0$ ， $\dfrac{1}{2}c^2-7c+\dfrac{9}{2}=0$ ， $c=7\pm\sqrt{7^2-4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{2}}=7\pm\sqrt{40}$ ． 接線 L は，方程式 $y=3x+7+\sqrt{40}$ で表される直線であるか，または，方程式 $y=3x+7-\sqrt{40}$ で表される直線である．　終

問題 5.補遺1.1　xy 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(3,4)$ を中心とする半径が $\sqrt{5}$ である円 C の接線 L の傾きが 2 であるとします． L を表す方程式を求めなさい．

例題　次のような定数 c の値の範囲を求めなさい：xy 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(-3,1)$ を中心とする半径が 3 である円 C と方程式 $y=2x+c$ が表す直線 L との共有点がある．

〔解答〕 C と L との共有点がある条件は，円 C の中心と直線 L との間の距離が C の半径 3 以下であることである． L は方程式 $2x-y+c=0$ で表されるので，C の中心 $(-3,1)$ と L との間の距離は $\dfrac{|2\cdot(-3)-1+c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|c-7|}{\sqrt{5}}$ である． これの値が 3 以下なので， $\dfrac{|c-7|}{\sqrt{5}}\leq 3$ ， $|c-7|\leq 3\sqrt{5}$ ， $-3\sqrt{5}\leq c-7\leq 3\sqrt{5}$ ， $7-3\sqrt{5}\leq c\leq 7+3\sqrt{5}$ ．

〔別解〕 C と L との共有点を $\mathrm{P}=(p,q)$（p,q は実数）とおく． 点 $\mathrm{P}=(p,q)$ は方程式 $y=2x+c$ が表す直線 L に属すので $q=2p+c$ ， 点 $\mathrm{P}=(p,q)$ は円 C に属すので， $\overline{\mathrm{AP}}=3$ ， $\overline{\mathrm{AP}}^2=9$ ， $(p+3)^2+(q-1)^2=9$ ． 点 $\mathrm{P}=(p,q)$ が共有点である条件は，p,q に関する連立方程式

$$q=2p+c \quad \text{かつ} \quad (p+3)^2+(q-1)^2=9$$

の解が実数であることである． $q=2p+c$ を $(p+3)^2+(q-1)^2=9$ に代入すると，

$$(p+3)^2+(2p+c-1)^2=9 \ ,$$
$$5p^2+2(2c+1)p+c^2-2c+1=0 \ .$$

この p に関する2次方程式の解が実数である条件は，判別式の値が 0 以上であることなので，

$$\{2(2c+1)\}^2-4\cdot5\cdot(c^2-2c+1)\geq 0 \ ,$$

整理すると $c^2-14c+2\leq 0$ ， $\left(c-7+\sqrt{45}\right)\left(c-7-\sqrt{45}\right)\leq 0$ ， $7-\sqrt{45}\leq c\leq 7+\sqrt{45}$ ．　終

問題 5.補遺1.2　次のような定数 c の値の範囲を求めなさい：xy 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(-1,2)$ を中心とする半径が $\sqrt{7}$ である円 C と方程式 $y=3x+c$ が表す直線 L の共有点が無い．