§5.7 球

2 次元座標空間 $\mathbf{R}^2$ において，点 A 及び 0 以上の実数 r に対して，$\overline{\mathrm{AP}}=r$ である点 P の全体を円といいました．

3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において，点 A 及び 0 以上の実数 r に対して，$\overline{\mathrm{AP}}=r$ である点 P の全体を球と言います．

定義　3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A 及び 0 以上の実数 r に対して，$\overline{\mathrm{AP}}=r$ となる点 P の全体

$$\{\, \mathrm{P}\in\mathbf{R}^3 \mid \overline{\mathrm{OP}}=r \,\}$$

を，点 A を中心とする半径 r の球という．

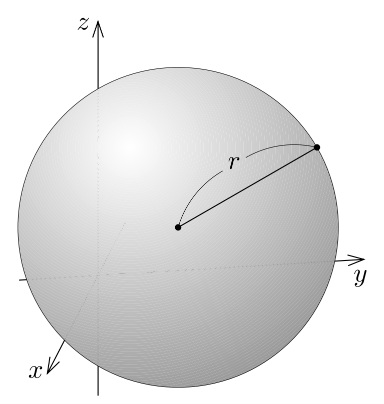
定理5.7　a,b,c,r は定数で $r\geq 0$ とする．xyz 座標空間において，点 (a,b,c) を中心とする半径が r である球は方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

で表される．逆に，方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

で表される図形は点 (a,b,c) を中心とする半径が r である球である．



証明　3 次元座標空間の点 A を $\mathrm{A}=(a,b,c)$ とおく．3 次元座標空間の点 $\mathrm{P}=(x,y,z)$ について，$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}}=r &\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r\\ &\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}^{\,2}=r^2\\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\ .\end{aligned}$$

実数 a,b,c,r に対して，xyz 座標空間において点 (a,b,c) を中心とする半径が r である球を S とおく．xyz 座標空間の各点 $\mathrm{P}=(x,y,z)$ について，

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in S \iff \mathrm{P}\in S \iff \overline{\mathrm{OP}}=r\\ \iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\ .\end{aligned}$$

従って球 S は方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ で表される．

逆に，実数 a,b,c,r に対して，xyz 座標空間において方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ が表す図形を S とおく．座標空間の各点 $\mathrm{P}=(x,y,z)$ について

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\in S \iff (x,y,z)\in C \iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\\ \iff \overline{\mathrm{OP}}=r\ .\end{aligned}$$

従って図形 S は点 $\mathrm{A}=(a,b,c)$ を中心とする半径が r である球である．

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において点 $\left(3,\frac{5}{4},-6\right)$ を中心とする半径が 7 である球を表す方程式を求める．

点 $\left(3,\frac{5}{4},-6\right)$ が中心であり半径が 7 である球は方程式

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2+(y+6)^2=49$$

で表される．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.6.1}}$　xy 座標空間において点 $\left(4,-5,-\frac{7}{6}\right)$ を中心とする半径が 9 である球を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において球 S の中心は点 $(3,-5,7)$ であり点 $(4,-2,9)$ が S に属するとする．S を表す方程式を求める．

球 S の半径 r は点 $(3,-5,7)$ と点 $(4,-2,9)$ との間の距離なので，

$$r^2=(4-3)^2+\{-2-(-5)\}^2+(9-7)^2=1+9+4=14\ .$$

球 S は方程式 $(x-3)^2+(y+5)^2+(z-7)=14$ で表される．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.6.2}}$　xyz 座標空間において球 S の中心は点 $(-5,-7,9)$ であり点 $(1,-8,6)$ が S に属するとします．S を表す方程式を求めなさい．

変数 x と y と z に関する 2 次方程式は，

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d\quad(\ a,b,d \text{ は定数で } d\geq 0\ )$$

の形に同値変形できれば，定理5.1より，xy 座標平面において点 (a,b,c) が中心であり半径が $\sqrt{d}$ である球を表します．この形に変形するために 2 次式の平方完成を用います．

$$x^2+2\cdot\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において方程式 $3x^2+3y^2+3z^2-8x+7y-5z=-2$ が表す図形は球であることを示し，その中心と半径とを求める．

〔解説〕 まず方程式 $3x^2+3y^2+3z^2-8x+7y-5z=-2$ の両辺を x^2 及び y^2 及び z^2 の係数の 3 で割る；

$$x^2+y^2+z^2-\frac{8}{3}x+\frac{7}{3}y-\frac{5}{3}z=-\frac{2}{3}\ ,$$

$$x^2-\frac{8}{3}x+y^2+\frac{7}{3}y+z^2-\frac{5}{3}z=-\frac{2}{3}\ .$$

x の係数 $-\frac{8}{3}=-2\cdot\frac{4}{3}$ の絶対値の $\frac{1}{2}$ の 2 乗 $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ と y の係数 $\frac{7}{3}=2\cdot\frac{7}{6}$ の絶対値の $\frac{1}{2}$ の 2 乗 $\left(\frac{7}{6}\right)^2$ と z の係数 $-\frac{5}{3}=-2\cdot\frac{5}{6}$ の絶対値の $\frac{1}{2}$ の 2 乗 $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ とを両辺に足す：

$$x^2-2\cdot\frac{4}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2+y^2+2\cdot\frac{7}{6}y+\left(\frac{7}{6}\right)^2+z^2-2\cdot\frac{5}{6}z+\left(\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}+\frac{49}{36}+\frac{25}{36}\ ,$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2+\left(z-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{6}\ .$$

これらの変形は同値変形である：

$$3x^2+3y^2+3z^2-8x+7y-5z=-2 \iff \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2+\left(z-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{6}\ .$$

方程式 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2+\left(z-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{6}$ が表す図形は点 $\left(\frac{4}{3},-\frac{7}{6},\frac{5}{6}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{\frac{11}{6}}$ の円である．故に，方程式 $3x^2+3y^2+3z^2-8x+7y-5z=-2$ が表す図形は円であり，その中心は $\left(\frac{4}{3},-\frac{7}{6},\frac{5}{6}\right)$ であり半径は $\sqrt{\frac{11}{6}}$ である．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.7.3}}$　xyz 座標空間において方程式 $5x^2+5y^2+5z^2-7x+8y+3z=-4$ が表す図形は球であることを示し，その中心と半径とを求めなさい．