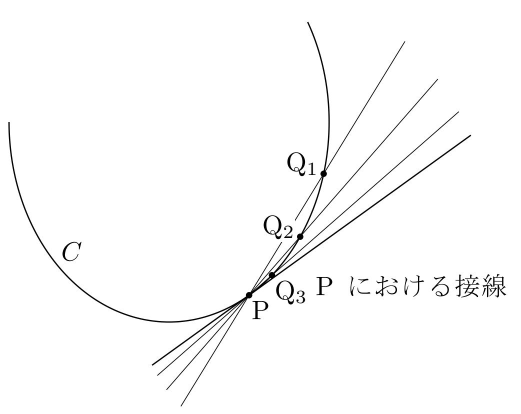
§5.6　2次曲線の接線

座標平面における2次曲線 C に属す点 P に対して，C に属す点で P と異なる点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_2, \ldots$ で限りなく P に近い点をとっていきます．このとき，直線 $\mathrm{PQ}_1, \mathrm{PQ}_2, \mathrm{PQ}_3, \ldots$ はある直線 L に限りなく近づいていきます；この直線 L を曲線 C の点 P における接線といい，点 P を接点といいます．直線 L が曲線 C の接線であるとき，L と C とは接するといいます．



座標平面における円の接線について定理5.2.1と定理5.2.2とがありました．定理5.2.1は円に特有の定理ですが，定理5.2.2は2次曲線に関する定理に拡張できます．その証明は省きます．

定理5.6　xy 座標平面における2次曲線 C と直線 L とについて，L が C の接線であることと，L を表す方程式と C を表す方程式との連立方程式の解が重解であることとは同値である．

例題　xy 座標平面において方程式 $4x = y^2$ が表す放物線 P の点 $(9,6)$ における接線 L を表す方程式を求める．

〔解説〕 x 軸に垂直な直線で点 $(9,6)$ が属すものは方程式 $x=9$ で表される．方程式 $4x=y^2$ と $x=9$ との連立方程式の解は $(x,y)=(9,\pm 6)$ でありこれらは重解でない．方程式 $x=9$ で表される直線は P の接線ではない．従って直線 L は x 軸に垂直ではないので，L の傾き m がある．$(9,6) \in L$ なので，L は方程式 $y=m(x-9)+6$ で表される．これと方程式 $4x=y^2$ との連立方程式を考える．$4x=\{m(x-9)^2+6\}^2$，$m^2(x-9)^2+12m(x-9)-4x+36=0$，この x に関する方程式の解の一つは 9 なので，左辺は $x-9$ を因数とする；$m^2(x-3)^2+12m(x-9)-4(x-9)=0$，$(x-9)\{m^2(x-9)+12m-4\}=0$，$x=9$ または $x=-\dfrac{12m-4}{m^2}+9$；これらの解が重解なので，$-\dfrac{12m-4}{m^2}+9=9$，$12m-4=0$，$m=\dfrac{1}{3}$．接線 L の傾きは $\dfrac{1}{3}$ なので，L は方程式 $y=\dfrac{1}{3}(x-9)+6$ つまり $y=\dfrac{1}{3}x+3$ で表される．　終

問題 5.6.1　xy 座標平面において方方程式 $2x=y^2$ が表す放物線 P の点 $(8,4)$ における接線 L を表す方程式を求めなさい．

例題　xy 座標平面において方方程式 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$ が表す楕円 E の点 $(3,2)$ における接線 L を表す方程式を求める．

〔解説〕 x に垂直な直線で点 $(3,2)$ が属すものは方程式 $x=3$ で表される．方程式 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$ と $x=3$ との連立方程式を解くと $(x,y)=(3,\pm 2)$；これらの解は重解でない．方程式 $x=3$ で表される直線は E の接線ではない．従って接線 L の傾き m がある．L は方程式 $y=m(x-3)+2$ で表される．これと方程式 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$ との連立方程式を考える．$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{\{m(x-3)+2\}^2}{16}=1$，$4x^2+3\{m(x-3)+2\}^2=48$，$3m^2(x-3)^2+12m(x-3)+4x^2-36=0$；この x に関する方程式の解の一つは 3 なので，左辺は $x-3$ を因数とする；$3(x-3)^2m^2+12m(x-3)+4(x+3)(x-3)=0$，$(x-3)\{3(x-3)m+12m+4(x+3)\}=0$，$(x-3)\{(3m^2+4)x-9m^2+12m+12\}=0$，$x=3$ または $x=\dfrac{9m^2+12m+12}{3m^2+4}$；これらの解が重解なので，$\dfrac{9m^2-12m-12}{3m^2+4}=3$，$9m^2-12m-12=9m^2+12$，$12m=-24$，$m=-2$．このとき，解 $(x,y)=(3,2)$ は重解である．接線 L の傾きは -2 であり，L は方程式 $y=-2(x-3)+2$ つまり $y=-2x+8$ で表される．　終

問題 5.6.2　xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$ が表す双曲線 H の点 $(4,1)$ における接線 L を表す方程式を求めなさい．

例題　xy 座標平面において方程式 $15x=y^2$ が表す放物線 P の接線 L の一つの方向ベクトルが $(2,3)$ であるとする．P と L との接点を求める．

〔解説〕 ベクトル $(2,3)$ が直線 L の方向ベクトルなので，ある定数 c をとると，L は方程式 $3x-2y=c$ で表される．この方程式より $x=\dfrac{2y+c}{3}$，方程式 $15x=y^2$ より $15\cdot\dfrac{2y+c}{3}=y^2$，$10y+5c=y^2$，$y^2-10y=5c$，$(y-5)^2=5c+25$．$y$ に関するこの方程式の解が重解である条件は $5c+25=0$ つまり $c=-5$ であり，このとき $y=5$．このとき $x=\dfrac{2y+c}{3}=\dfrac{5}{3}$．$P$ と L との接点は $\left(\dfrac{5}{3},5\right)$ である．　終

問題 5.6.3　xy 座標平面において方程式 $16x=y^2$ が表す放物線 P の接線 L の一つの方向ベクトルが $(3,4)$ であるとする．P と L との接点を求めなさい．

例題　xy 座標平面において方程式 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ が表す双曲線 H の接線 L の一つの方向ベクトルが $(2,3)$ であるとする．H と L との接点を求める．

〔解説〕 直線 L の一つの方向ベクトルが $(2,3)$ なので，L は方程式 $3x-2y=c$ で表される．この方程式より $y=\dfrac{3x-c}{2}$，方程式 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ より $x^2-\dfrac{(3x-c)^2}{8}=1$，$x^2-6cx+c^2+8=0$，$x^2-6cx+9c^2-c^2=8c^2-8$，$(x-3c)^2=8c^2-8$．$x$ に関するこの方程式の解が重解である条件は $8c^2-8=0$ つまり $c=\pm 1$；このとき，$x=3c=\pm 3$，$y=\dfrac{3x-c}{2}=4c=\pm 4$．$H$ と L との接点は，$(3,4)$ であるかまたは $(-3,-4)$ である．　終

問題 5.6.4　xy 座標平面において方程式 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ が表す楕円 E の接線 L の一つの方向ベクトルが $(1,2)$ であるとする．E と L との接点を求めなさい．