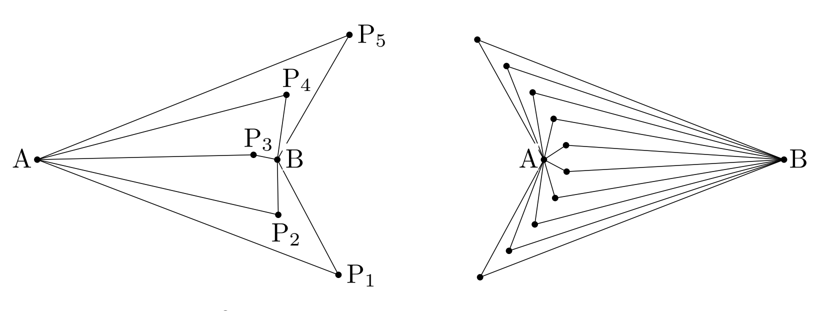
§5.5 双曲線

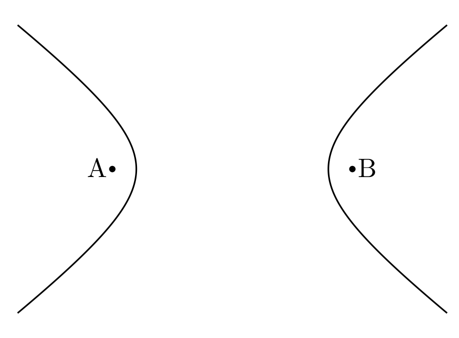
座標平面 $\mathbf{R}^2$ において2点 A と B とを定めます． 仮に $\overline{\mathrm{AB}}=5$ とします．



上の左側の図において，$\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3,\dots,\mathrm{P}_5$ は次の条件を満たします：

$$\overline{\mathrm{AP}_1}-\overline{\mathrm{BP}_1}=4\ ,\quad \overline{\mathrm{AP}_2}-\overline{\mathrm{BP}_2}=4\ ,\quad \overline{\mathrm{AP}_3}-\overline{\mathrm{BP}_3}=4\ ,\quad \cdots\quad ,\overline{\mathrm{AP}_5}-\overline{\mathrm{BP}_5}=4\ .$$

また， $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=-4$ となる点 P を沢山とると上の右側の図のようになります． 更に， $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=\pm4$ となる点 P を総て集めると右図のような曲線になります． このような曲線を**双曲線** (hyperbola) といい，定点 A と B とを**焦点** (focus) といいます．



定義　座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，定点 A, B と定数 k とについて $0<k<\overline{\mathrm{AB}}$ であるとき， $\left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}\right|=k$ である点 P の全体

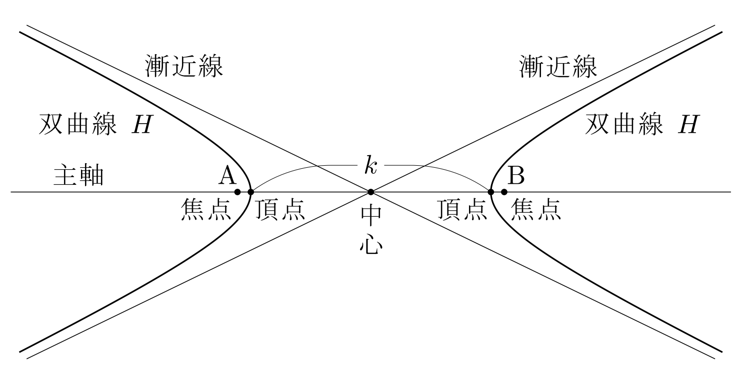
$$\{\ \mathrm{P}\in\mathbf{R}^2\mid\ \left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}\right|=k\ \}$$

を双曲線といい，点 A と B とを焦点という．

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B について $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ とし，定数 k について $k<\overline{\mathrm{AB}}$ とします． 点 A と B とを焦点とする双曲線

$$H=\{\ \mathrm{P}\in\mathbf{R}^2\mid\ \left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}\right|=k\ \}$$

を考えます． 線分 AB の中点を双曲線 H の中心といいます． H の焦点 A と B とを通る直線 AB を双曲線 H の主軸といい，H とその主軸との共有点を頂点といいます． 2個の頂点の間の距離は k です． 双曲線 H に対して次のような直線が2本あります：その直線と双曲線との共有点はないが双曲線はその直線に限りなく近付いていく． このような直線を H の漸近線といいます．



座標平面において双曲線を表す方程式を導出します．

補助定理　実数 a,c について $c>a>0$ とする． 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，点 $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ と各実数 x,y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ とについて，

$$\left|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}\right|=2a\iff\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1\ .$$

証明　変数 x,y に対して $\mathrm{P}=(x,y)$ とおく．

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}^2=(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2\ ,$$
$$\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}^2=(x+c)^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\ .$$

$\left|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}\right|=2a$ とすると， $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=\pm2a$ ， $\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}\pm2a$ ， よって，

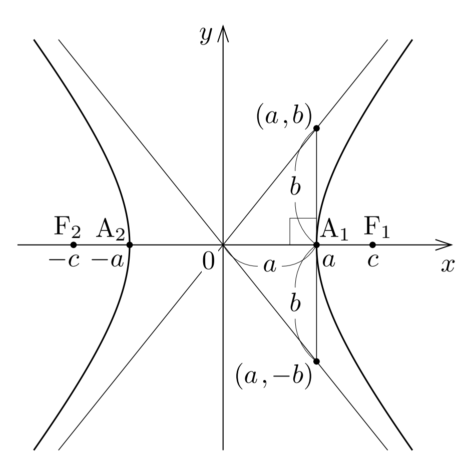
$$\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}^2=\left(\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}\pm2a\right)^2=4a^2\pm4a\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}^2\ ,$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2\pm4a\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+x^2-2cx+c^2+y^2\ ,$$
$$\pm4a\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}=4cx-4a^2\ ,$$
$$\pm\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}=\frac{c}{a}x-a\ ,$$
$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2\ ,$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2\ ,$$
$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2\ ,$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1\ .$$

故に， $\left|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}\right|=2a$ ならば $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ ． 証明は後で述べるが，逆に， $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ ならば $\left|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}\right|=2a$ ． （証明終り）

定理 5.5.1　0 でない定数 a,b について，xy 座標平面における双曲線 H の頂点が $(a,0)$ と $(-a,0)$ とであり，点 (a,b) が H の漸近線に属すとき， H は方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される．

証明　定数 a,b が正のときを扱う． xy 座標平面における双曲線 H について，H の頂点は $\mathrm{A}_1=(a,0)$ と $\mathrm{A}_2=(-a,0)$ とであり，点 (a,b) が H の漸近線に属すとする． H の中心は，点 $\mathrm{A}_1=(a,0)$ と $\mathrm{A}_2=(-a,0)$ との中点なので，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ である． H について，両方の頂点が x 軸に属すので，両方の焦点も x 軸に属す． ある正の定数 c をとると， $c>a$ で，H の焦点は $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ とである． $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_1}=c-a$ ， $\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1}=a-(-c)=a+c$ なので，

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_1}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1}=-2a\ ,$$
$$\left|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_1}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1}\right|=2a\ .$$



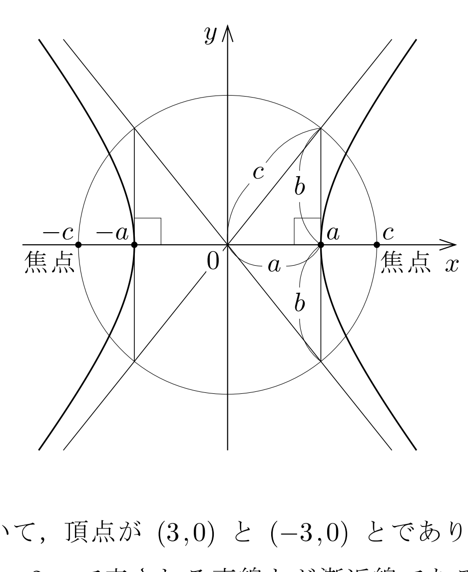
補助定理より，変数 x,y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について，

$$\mathrm{P}\in H\iff\left|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}\right|=2a$$
$$\iff\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1\ .$$

双曲線 H は方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ で表される． H は，x 座標の絶対値を限りなく大きくしていくと，漸近線に限りなく近づいていく． H を表す方程式は， $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ ， $\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=\dfrac{x^2}{a^2}-1$ ， $\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{c^2-a^2}{a^2}-\dfrac{c^2-a^2}{x^2}$ ；ここで x の絶対値を限りなく大きくしていくと， $\dfrac{c^2-a^2}{x^2}$ は限りなく 0 に近づく． これより，H の漸近線を表す方程式は $\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{c^2-a^2}{a^2}$ である． 点 (a,b) が H の漸近線に属すので， $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{c^2-a^2}{a^2}$ ， $c^2-a^2=b^2$ ． 故に双曲線 H は方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される． （証明終り）

0 でない定数 a,b に対して，xy 座標平面において双曲線を表す方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を標準形といいます． 次の定理の証明は後にします．

定理 5.5.2　0 でない定数 a,b について，xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が表す図形 H は双曲線であり，H の主軸は x 軸であり， H の中心は原点 $(0,0)$ であり， $c^2=a^2+b^2$ である定数 c に対して H の焦点は $(c,0)$ と $(-c,0)$ とであり，H の頂点は $(a,0)$ と $(-a,0)$ とであり， H の漸近線は方程式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$ で表される直線と方程式 $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ で表される直線とである．



$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における双曲線 H について，頂点が $(3,0)$ と $(-3,0)$ とであり，方程式 $y=2x$ で表される直線と方程式 $y=-2x$ で表される直線とが漸近線であるとする． H を表す方程式を求める．

実数 b について点 $(3,b)$ が H の漸近線に属すとき $b=6$ ． 双曲線 H は方程式 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$ で表される． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 5.5.1}}$　xy 座標平面における双曲線 H について，頂点が $(6,0)$ と $(-6,0)$ とであり，方程式 $y=\dfrac{2}{3}x$ で表される直線と方程式 $y=-\dfrac{2}{3}x$ で表される直線とが漸近線であるとする． H を表す方程式を求める．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における双曲線 H について，焦点が $(4,0)$ と $(-4,0)$ とであり，方程式 $y=3x$ で表される直線と方程式 $y=-3x$ で表される直線とが漸近線であるとする． H を表す方程式を求める．

双曲線 H について，中心は，焦点 $(4,0)$ と $(-4,0)$ との中点なので，原点 $(0,0)$ である． 両方の焦点が x 軸に属すので，両方の頂点は x 軸に属す． 実数 a について点 $(a,0)$ と $(-a,0)$ とが H の頂点であるとき， $a^2+(3a)^2=4^2$ なので $a^2=\dfrac{8}{5}$ ． H の漸近線を表す方程式 $y=3x$ において $x^2=\dfrac{8}{5}$ とすると $y^2=\dfrac{72}{5}$ ． 双曲線 H は方程式 $\dfrac{x^2}{\frac{8}{5}}-\dfrac{y^2}{\frac{72}{5}}=1$ つまり $\dfrac{5x^2}{8}-\dfrac{5y^2}{72}=1$ で表される． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 5.5.2}}$　xy 座標平面における双曲線 H について，焦点が $(5,0)$ と $(-5,0)$ とであり，方程式 $y=2x$ で表される直線と方程式 $y=-2x$ で表される直線とが漸近線であるとする． H を表す方程式及び H の漸近線を表す方程式を求めなさい．

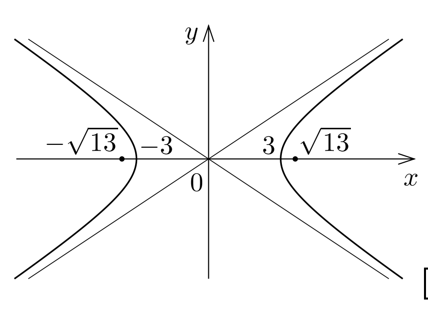
$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における双曲線 H について，焦点が $(6,0)$ と $(-6,0)$ とであり，2個の頂点の間隔が 10 であるとする． H を表す方程式及び H の漸近線を表す方程式を求める．

双曲線 H について，中心は，焦点 $(6,0)$ と $(-6,0)$ との中点なので，原点 $(0,0)$ である． 両方の焦点が x 軸に属すので，主軸は x 軸である． 2個の頂点の間隔が 10 なので，頂点は $(5,0)$ と $(-5,0)$ とである． 実数 b について点 $(5,b)$ が H の漸近線に属すとき， $5^2+b^2=6^2$ なので $b^2=11$ ． 双曲線 H は方程式 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{11}=1$ で表される． 漸近線は，方程式 $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{\sqrt{11}}=0$ が表す直線と方程式 $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{\sqrt{11}}=0$ が表す直線とである． つまり，漸近線は，方程式 $\sqrt{11}\,x+5y=0$ が表す直線と方程式 $\sqrt{11}\,x-5y=0$ が表す直線とである． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 5.5.3}}$　xy 座標平面における双曲線 H について，焦点が $(7,0)$ と $(-7,0)$ とであり，2個の頂点の間隔が 12 であるとします． H を表す方程式及び H の漸近線を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ で表される双曲線の焦点と漸近線とを求め, その双曲線の概形を描く．

双曲線の焦点は $\left(\sqrt{13},0\right)$ と $\left(-\sqrt{13},0\right)$ ． 双曲線の漸近線を表す方程式は $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=0$ 及び $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0$ ，つまり $2x+3y=0$ 及び $2x-3y=0$ ． $y=0$ とすると $x=\pm3$ なので，双曲線と x 軸との共有点は $(3,0)$ と $(-3,0)$ とである．



$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 5.5.4}}$　xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$ で表される双曲線の焦点と漸近線とを求め, その双曲線の概形を描きなさい．

反比例のグラフは双曲線であることを示します． 定数 a について $a>0$ とします． xy 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(a,a)$ と $\mathrm{B}=(-a,-a)$ とが焦点であり2個の頂点の間の距離が $2a$ である双曲線 H を表す方程式を求めます． 変数 x,y に対して $\mathrm{P}=(x,y)$ とおきます．

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x-a)^2+(y-a)^2=x^2-2ax+y^2-2ay+2a^2\ ,$$
$$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x+a)^2+(y+a)^2=x^2+2ax+y^2+2ay+2a^2\ .$$

$\left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}\right|=2a$ とすると， $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=\pm2a$ ， $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}\pm2a$ ， よって，

$$\overline{\mathrm{BP}}^2=\left(\overline{\mathrm{AP}}\pm2a\right)^2=4a^2\pm4a\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{AP}}^2\ ,$$
$$x^2+2ax+y^2+2ay+2a^2=4a^2\pm4a\overline{\mathrm{AP}}+x^2-2ax+y^2-2ay+2a^2\ ,$$
$$\pm4a\overline{\mathrm{AP}}=4a(x+y)-4a^2=4a(x+y-a)\ ,$$
$$\pm\overline{\mathrm{AP}}=x+y-a\ ,$$
$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+y-a)^2\ ,$$
$$x^2-2ax+y^2-2ay+2a^2=x^2+2xy+y^2-2ax-2ay+a^2\ ,$$
$$a^2=2xy\ ,$$
$$xy=\frac{a^2}{2}\ .$$

証明は略しますが，逆に方程式 $xy=\dfrac{a^2}{2}$ から $\left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}\right|=2a$ を導くことができます． よって，

$$(x,y)\in H\iff\mathrm{P}\in H\iff\left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}\right|=2a\iff xy=\frac{a^2}{2}\ .$$

従って双曲線 H は方程式 $xy=\dfrac{a^2}{2}$ で表されます． 定数 k を $k=\dfrac{a^2}{2}$ とおきます． $a=\sqrt{2k}$ ． $xy=k$ なので $y=\dfrac{k}{x}$ ． このようにして次のことが分かります：正の定数 k に対して，方程式 $y=\dfrac{k}{x}$ で表される反比例のグラフは双曲線であり，焦点は $(a,a)=\left(\sqrt{2k},\sqrt{2k}\right)$ と $(-a,-a)=\left(-\sqrt{2k},-\sqrt{2k}\right)$ とであり，主軸は方程式 $y=x$ で表される直線であり，頂点は $\left(\sqrt{k},\sqrt{k}\right)$ と $\left(\sqrt{k},\sqrt{k}\right)$ とである．

一般的に次の定理が成り立ちます． その証明は省きます．

定理　定数 a,b,c,d,e,f,g について， $ae\neq bd$ かつ $g\neq0$ とします． xy 座標平面において方程式 $(ax+by+c)(dx+ey+f)=g$ が表す図形は双曲線であり，方程式 $ax+by+c=0$ が表す直線と方程式 $dx+ey+f=0$ が表す直線とがその漸近線である．

——— 定理の証明

補助定理の証明において後回しにしたことを証明します． 実数 a,c について $c>a>0$ とします． 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，点 $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ とを考えます． 次のことを証明します：各実数 x,y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について， $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ ならば $\left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}\right|=2a$ ．

証明　$\mathrm{P}=(x,y)$ について，

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}^2=(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2\ ,$$
$$\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}^2=(x+c)^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\ .$$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ とする． $c>a>0$ より $c^2>a^2$ なので $c^2-a^2>0$ ，更に $y^2\geq0$ なので， $\dfrac{x^2}{a^2}-1=\dfrac{y^2}{c^2-a^2}\geq0$ ， $\dfrac{x^2}{a^2}\geq1$ ， $x^2\geq a^2$ ； $a>0$ なので

$$x\leq-a\ \text{または}\ x\geq a\ .$$

仮定 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ より $y^2=(c^2-a^2)\left(\dfrac{x^2}{a^2}-1\right)$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}&=\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\&=\sqrt{(x-c)^2+(c^2-a^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}-\sqrt{(x+c)^2+(c^2-a^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}\\&=\sqrt{a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}-\sqrt{a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}\\&=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}-\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}\ .\end{aligned}$$

$x\geq a$ のとき， $-\dfrac{c}{a}x\leq-\dfrac{c}{a}a=-c$ ， $a-\dfrac{c}{a}x\leq a-c<0$ ，また $a+\dfrac{c}{a}x\geq a+c>0$ ，よって

$$\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=-\left(a-\frac{c}{a}x\right)\ ,\quad\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=a+\frac{c}{a}x\ ,$$
$$\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}-\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=-\left(a-\frac{c}{a}x\right)-\left(a+\frac{c}{a}x\right)=-2a\ .$$

$x\leq-a$ のとき， $-\dfrac{c}{a}x\geq-\dfrac{c}{a}(-a)=c$ ， $a-\dfrac{c}{a}x\geq a+c>0$ ，また $a+\dfrac{c}{a}x\leq a+\dfrac{c}{a}(-a)=a-c<0$ ，よって

$$\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=a-\frac{c}{a}x\ ,\quad\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=-\left(a+\frac{c}{a}x\right)\ ,$$
$$\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}-\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=a-\frac{c}{a}x-\left\{-\left(a+\frac{c}{a}x\right)\right\}=2a\ .$$

故に $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=\pm2a$ ． （証明終り）

定理 5.5.2 を証明します． 定数 a,b について $a>0$ ， $b>0$ とします． xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される表す図形を H とおきます． $a^2+b^2=c^2$ である実数 c を考えます． 次のことを証明します：H は双曲線であり，H の中心は原点 $(0,0)$ であり， H の頂点は $(a,0)$ と $(-a,0)$ とであり， H の焦点は $(c,0)$ と $(-c,0)$ とであり， H の漸近線は方程式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$ で表される直線と方程式 $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ で表される直線とである．

証明　$c^2=a^2+b^2$ なので

$$c^2-a^2=a^2+b^2-a^2=b^2\ .$$

補助定理より，点 $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ 及び，各実数 x,y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について，

$$\left|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}\right|=2a\iff\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1\iff\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

図形 H は方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表されるので，座標平面の点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について，

$$\mathrm{P}\in H\iff(x,y)\in H\iff\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\iff\left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AP}}\right|=2a\ .$$

H は双曲線であり，H の焦点は $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ とである． H の中心は，焦点 $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ とを結ぶ線分の中点なので，原点 $(0,0)$ である． H について，両方の焦点が x 軸に属すので，H の主軸は x 軸と一致する． H をあらわす方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において $y=0$ とすると $x=\pm a$ ． H の頂点は $(a,0)$ と $(-a,0)$ とである．

xy 座標平面において変数 u,v に対する点 (u,v) が方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される双曲線 H に属すとする． $\dfrac{u^2}{a^2}-\dfrac{v^2}{b^2}=1$ なので $b^2u^2-a^2v^2=a^2b^2$ ，左辺を因数分解すると

$$(bu+av)(bu-av)=a^2b^2\ .$$

$a^2b^2>0$ なので， $bu+av\neq0$ ， $bu-av\neq0$ ．

$$bu-av=\frac{a^2b^2}{bu+av}\ .$$

変数 u,v の値を限りなく大きくしていく． $a>0$ ， $b>0$ なので，$bu+av$ の値も限りなく大きくなっていくので， $bu-av=\dfrac{a^2b^2}{bu+av}$ の値は限りなく 0 に近付いていく． 従って，点 (u,v) と直線 $bx-ay=0$ の距離 $\dfrac{|bu-av|}{\sqrt{b^2+a^2}}$ も限りなく 0 に近付いていく． このように，変数 u,v の値を限りなく大きくしていくと，双曲線 H に属す点 (u,v) は直線 $bx-ay=0$ つまり $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ に限りなく近付いていく． よって直線 $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ は双曲線 H の漸近線である． 同様に，直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$ も双曲線 H の漸近線である． （証明終り）