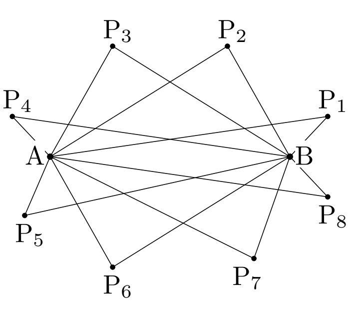
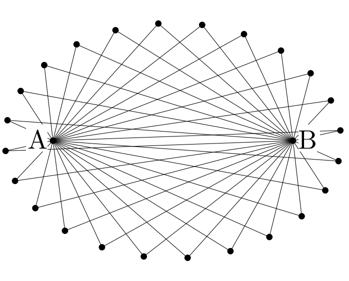
§5.4　楕円

座標平面 $\mathbf{R}^2$ において2点 A と B とを定めます．仮に $\overline{\mathrm{AB}}=5$ とします．

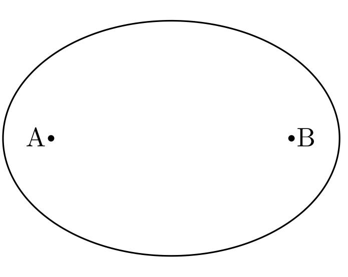




上の左側の図において，$\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3,\dots,\mathrm{P}_8$ は次の条件を満たします：

$$\overline{\mathrm{AP}_1}+\overline{\mathrm{BP}_1}=7\ ,\quad \overline{\mathrm{AP}_2}+\overline{\mathrm{BP}_2}=7\ ,\quad \overline{\mathrm{AP}_3}+\overline{\mathrm{BP}_3}=7\ ,\quad \cdots\quad ,\overline{\mathrm{AP}_8}+\overline{\mathrm{BP}_8}=7\ .$$

このように，$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=7$ となる点 P を沢山とると上の右側の図のようになります．更に $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=7$ となる点を総て集めると右図のような曲線になります．このような曲線を**楕円** (ellipse) といい，定点 A と B とを**焦点** (focus) といいます．



定義　座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，定点 A, B と定数 k とについて $k\geq\overline{\mathrm{AB}}$ であるとき，$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=k$ である点 P の全体

$$\{\,\mathrm{P}\in\mathbf{R}^2 \mid \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=k\,\}$$

を楕円といい，点 A と B とを焦点という．

定数 k について $k\geq 0$ とします．座標平面 $\mathbf{R}^2$ の定点 A, B について A = B のとき，$\mathbf{R}^2$ の点 P について，

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=k \iff \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{AP}}=k \iff 2\overline{\mathrm{AP}}=k \iff \overline{\mathrm{AP}}=\frac{k}{2}\ .$$

従って，点 A と B とを焦点とする楕円は

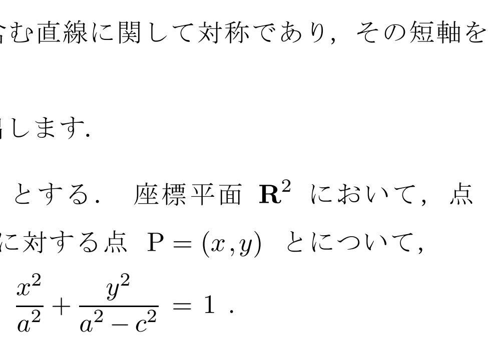
$$\{\,\mathrm{P}\in\mathbf{R}^2 \mid \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=k\,\}=\left\{\mathrm{P}\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, \overline{\mathrm{AP}}=\frac{k}{2}\right\}.$$

この点集合は A を中心とする円です．つまり，楕円の2個の焦点が重なるとき，その楕円は円になります．

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B について A ≠ B とし，定数 k について $k>\overline{\mathrm{AB}}$ とします．点 A と B とを焦点とする楕円

$$E=\{\,\mathrm{P}\in\mathbf{R}^2 \mid \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=k\,\}$$

を考えます．線分 AB の中点を楕円 E の中心といいます．証明は省きますが，直線 AB と楕円 E とには異なる2個の共有点があります．それら2個の共有点を結ぶ線分を楕円 E の長軸といいます．



長軸の長さは k です．更に，証明は省きますが，線分 AB の垂直2等分線と楕円 E とには異なる2個の共有点があります．それら2個の共有点を結ぶ線分を楕円 E の短軸といいます．楕円 E とその長軸あるいは短軸との共有点を E の頂点といいます．証明は省きますが，楕円はその長軸を含む直線に関して対称であり，その短軸を含む直線に関しても対称です．

座標平面において楕円を表す方程式を導出します．

補助定理　実数 a,c について $a>c\geq 0$ とする．座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，点 $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ と各実数 x,y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ とについて，

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1\ .$$

証明　$\mathrm{P}=(x,y)$ について，

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}^2=(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2\ ,$$
$$\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}^2=(x+c)^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\ .$$

$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a$ とすると，$\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a-\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}$ なので

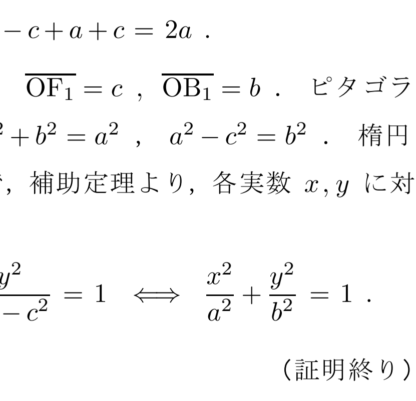
$$\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}^2=\left(2a-\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}\right)^2=4a^2-4a\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}^2\ ,$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+x^2-2cx+c^2+y^2\ ,$$
$$4a\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}=4a^2-4cx\ ,$$
$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}=a-\frac{c}{a}x\ ,$$
$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2\ ,$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2xc+\frac{c^2}{a^2}x^2\ ,$$
$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2\ ,$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1\ .$$

故に，$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a$ ならば $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ ．証明は後で述べるが，逆に，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ ならば $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a$ ．　（証明終り）

定理 5.4.1　0 でない定数 a,b について，xy 座標平面における楕円 E の頂点が $(a,0)$ と $(-a,0)$ と $(0,b)$ と $(0,-b)$ とであるとき，E は方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される．

証明　定数 a,b について $a\geq b>0$ のときを扱う．

xy 座標平面における楕円 E について，点 $\mathrm{A}_1=(a,0)$ と $\mathrm{A}_2=(-a,0)$ と $\mathrm{B}_1=(0,b)$ と $\mathrm{B}_2=(0,-b)$ とが頂点であるとする．E の中心は原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ である．$a>b$ なので，E の長軸は，線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ であり，x 軸に含まれる．よって，ある正の定数 c をとると，E の焦点は $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ とである．



$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_1}=a-c\ ,\qquad \overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1}=a-(-c)=a+c\ ,$$

これより，

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{B}_1}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{B}_1}=\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_1}+\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1}=a-c+a+c=2a\ .$$

$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{B}_1}=\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{B}_1}$ なので，$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{B}_1}=\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{B}_1}=a$ ．また，$\overline{\mathrm{OF}_1}=c$ ，$\overline{\mathrm{OB}_1}=b$ ．ピタゴラスの定理より $\overline{\mathrm{OF}_1}^2+\overline{\mathrm{OB}_1}^2=\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{B}_1}^2$ なので，$c^2+b^2=a^2$ ，$a^2-c^2=b^2$ ．楕円 E の焦点は $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ となので，補助定理より，各実数 x,y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について

$$\mathrm{P}\in E \iff \overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

楕円 E は方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される．　（証明終り）

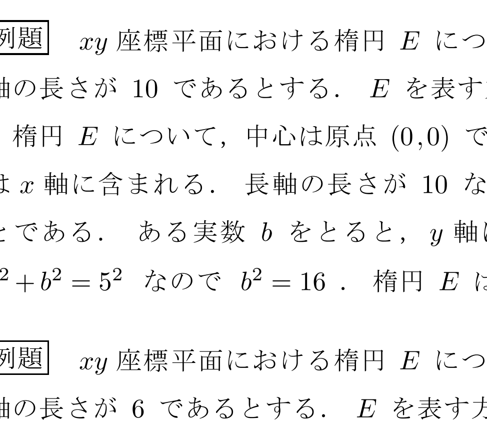
0 でない定数 a,b に対して，xy 座標平面において楕円を表す方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を標準形といいます．次の定理の証明は後にします．

定理 5.4.2　正の定数 a,b に対して，xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が表す図形 E は楕円であり，E の中心は原点 $(0,0)$ であり，E の頂点は $(a,0)$ と $(-a,0)$ と $(0,b)$ と $(0,-b)$ とである；

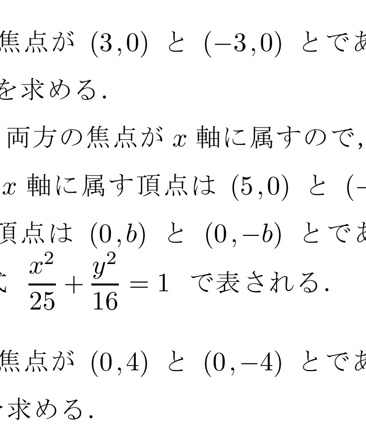
(1)　$a>b$ のとき，$a^2=b^2+c^2$ である定数 c に対して，E の焦点は $(c,0)$ と $(-c,0)$ とである；

(2)　$a=b$ のとき，E は原点 $(0,0)$ を中心とする半径 a の円である；

(3)　$a<b$ のとき，$b^2=a^2+c^2$ である定数 c に対して，E の焦点は $(0,c)$ と $(0,-c)$ とである．



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （ $a>b>0$ ）



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （ $b>a>0$ ）

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における楕円 E について，焦点が $(3,0)$ と $(-3,0)$ とであり長軸の長さが 10 であるとする．E を表す方程式を求める．

楕円 E について，中心は原点 $(0,0)$ である．両方の焦点が x 軸に属すので，長軸は x 軸に含まれる．長軸の長さが 10 なので，x 軸に属す頂点は $(5,0)$ と $(-5,0)$ とである．ある実数 b をとると，y 軸に属す頂点は $(0,b)$ と $(0,-b)$ とである．$3^2+b^2=5^2$ なので $b^2=16$ ．楕円 E は方程式 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ で表される．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における楕円 E について，焦点が $(0,4)$ と $(0,-4)$ とであり短軸の長さが 6 であるとする．E を表す方程式を求める．

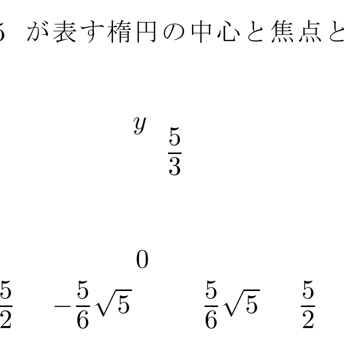
楕円 E について，中心は原点 $(0,0)$ である．両方の焦点が y 軸に属すので，長軸は y 軸に含まれ，短軸は x 軸に含まれる．短軸の長さが 6 なので，x 軸に属す頂点は $(3,0)$ と $(-3,0)$ とである．ある実数 b をとると，y 軸に属す頂点は $(0,b)$ と $(0,-b)$ とである．$b^2=3^2+4^2=25$ ．楕円 E は方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ で表される．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4.1}}$　xy 座標平面における楕円 E について，焦点は $(0,5)$ と $(0,5)$ とであり長軸の長さが 18 であるとします．E を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{問題 5.4.2}}$　xy 座標平面における楕円 E について，焦点は $(3,0)$ と $(-3,0)$ とであり短軸の長さが 14 であるとします．E を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1$ が表す楕円の中心と焦点とを求め，その楕円の概形を描く．

方程式 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1$ が表す楕円の中心は原点 $(0,0)$ であり，焦点は $\left(0,\sqrt{2}\right)$ と $\left(0,-\sqrt{2}\right)$ とである．$y=0$ とすると $x=\pm\sqrt{5}$ なので，楕円と x 軸との共有点は $\left(\sqrt{5},0\right)$ と $\left(-\sqrt{5},0\right)$ とである．$x=0$ とすると $y=\pm\sqrt{7}$ なので，楕円と y 軸との共有点は $\left(0,\sqrt{7}\right)$ と $\left(0,-\sqrt{7}\right)$ とである．



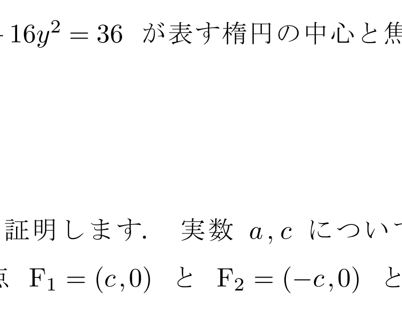
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4.3}}$　xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{3}=1$ が表す楕円の中心と焦点とを求め, その楕円の概形を描きなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において方程式 $4x^2+9y^2=25$ が表す楕円の中心と焦点とを求め, その楕円の概形を描く．

方程式 $4x^2+9y^2=25$ を変形すると，$\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{9y^2}{25}=1$ ，つまり

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=1\ .$$



この方程式が表す楕円の中心は原点 $(0,0)$ であり，焦点は $\left(\dfrac{5}{6}\sqrt{5},0\right)$ と $\left(-\dfrac{5}{6}\sqrt{5},0\right)$ とである．$y=0$ とすると $x=\pm\dfrac{5}{2}$ なので，楕円と x 軸との共有点は $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$ と $\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$ とである．$x=0$ とすると $y=\pm\dfrac{5}{3}$ なので，楕円と y 軸との共有点は $\left(0,\dfrac{5}{3}\right)$ と $\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$ とである．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4.4}}$　xy 座標平面において方程式 $25x^2+16y^2=36$ が表す楕円の中心と焦点とを求め, その楕円の概形を描きなさい．

——— 定理の証明

補助定理の証明において後回しにしたことを証明します．実数 a,c について $a>c\geq 0$ とします．座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，点 $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ とを考えます．次のことを証明します：各実数 x,y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ ならば $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a$ ．

証明　$\mathrm{P}=(x,y)$ について，

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}^2=(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2\ ,$$
$$\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}^2=(x+c)^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\ .$$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ とする．$a>c\geq 0$ より $a^2>c^2$ なので $a^2-c^2>0$ ，更に $y^2\geq 0$ なので，$1-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{a^2-c^2}\geq 0$ ，$\dfrac{x^2}{a^2}\leq 1$ ，$x^2\leq a^2$ ；$a>0$ なので

$$-a\leq x\leq a\ .$$

仮定 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ より $y^2=(a^2-c^2)\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}&=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\&=\sqrt{(x-c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\sqrt{(x+c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\\&=\sqrt{a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}+\sqrt{a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}\\&=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}+\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}\ .\end{aligned}$$

$x\leq a$ より，$-\dfrac{c}{a}x\geq -c$ ，$a-\dfrac{c}{a}x\geq a-c>0$ ，$\sqrt{\left(a-\dfrac{c}{a}x\right)^2}=a-\dfrac{c}{a}x$ ．$x\geq -a$ より，$\dfrac{c}{a}x\geq -c$ ，$a+\dfrac{c}{a}x\geq a-c>0$ ．$\sqrt{\left(a+\dfrac{c}{a}x\right)^2}=a+\dfrac{c}{a}x$ ．よって，

$$\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}+\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=a-\frac{c}{a}x+a+\frac{c}{a}x=2a\ .$$

故に $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a$ ．　（証明終り）

定理 5.4.2 を証明します．定数 a,b について $a\geq b>0$ のときを扱います．xy 座標平面において方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が表す図形 E とおきます．$a^2=b^2+c^2$ である定数 c を考えます．次のことを証明します：E は楕円であり，E の中心は原点 $(0,0)$ であり，E の頂点は $(a,0)$ と $(-a,0)$ と $(0,b)$ と $(0,-b)$ とであり，E の焦点は $(c,0)$ と $(-c,0)$ とである．

証明　$a^2=b^2+c^2$ なので

$$a^2-c^2=b^2+c^2-c^2=b^2\ .$$

補助定理より，点 $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ 及び，各実数 x,y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について，

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

図形 E は方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表されるので，座標平面の各点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について，

$$\mathrm{P}\in E \iff (x,y)\in E \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{P}}=2a\ .$$

E は楕円であり，E の焦点は $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ とである．E の中心は，焦点 $\mathrm{F}_1=(c,0)$ と $\mathrm{F}_2=(-c,0)$ とを結ぶ線分の中点なので，原点 $(0,0)$ である．E について，両方の焦点が x 軸に属すので，長軸は x 軸に含まれ，短軸は y 軸に含まれる．E を表す方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において，$y=0$ とすると $x=\pm a$ ，$x=0$ とすると $y=\pm b$ ．E の頂点は $(a,0)$ と $(-a,0)$ と $(0,b)$ と $(0,-b)$ とである．　（証明終り）