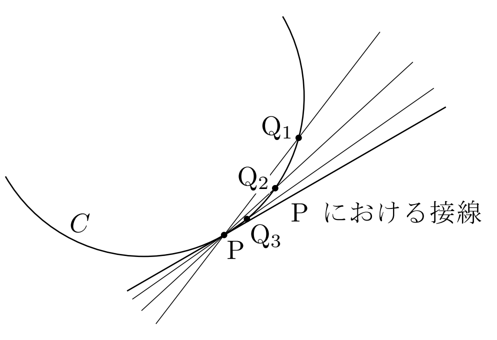
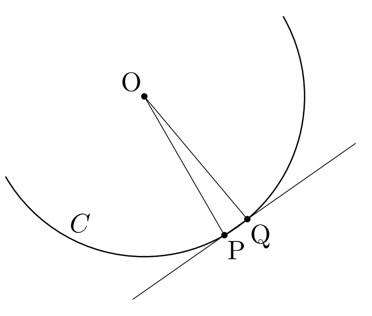
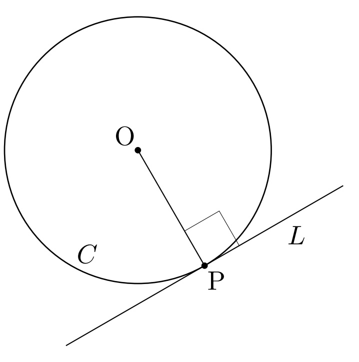
§5.2　円の接線

座標平面における円 C に属す点 P に対して，C に属す点で P と異なる点 $\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\mathrm{Q}_2,\dots$ で限りなく P に近い点をとっていきます．このとき，直線 $\mathrm{PQ}_1,\mathrm{PQ}_2,\mathrm{PQ}_3,\dots$ はある直線 L に限りなく近づいていきます；この直線 L を円 C の点 P における接線といい，点 P を接点といいます．直線 L が円 C の接線であるとき，L と C とは接するといいます．



平面において，点 O を中心とする円 C に属す点 P と Q とについて，$\mathrm{P}\neq\mathrm{Q}$ のとき，三角形 OPQ において $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$ なので，$\angle\mathrm{OPQ}=\angle\mathrm{OQP}$．点 P と Q とが限りなく近づいていくと，$\angle\mathrm{POQ}$ は 0° に限りなく近付くので，$\angle\mathrm{OPQ}=\angle\mathrm{OQP}$ は 90° に限りなく近付きます．このように考えると次の定理が導かれます．





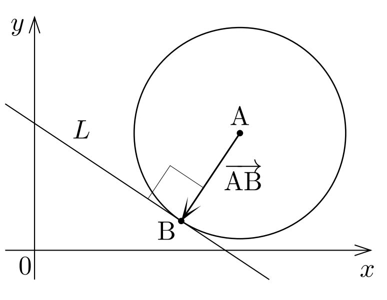
定理 5.2.1　点 O を中心とする円 C と直線 L とが点 P 共有するとき，

L は C の点 P における接線である

$\iff$ L は直線 OP と垂直である　．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(7,4)$ を中心とする円の点 $\mathrm{B}=(5,1)$ における接線 L を表す方程式を求める．

〔解説〕 定理 5.2.1 より直線 AB と接線 L と垂直なので，直線 AB の方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と L の方向ベクトルとは垂直である；従って $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は L の法線ベクトルである．直線 AB の方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,1)-(7,4)=(-2,-3)$ は L の法線ベクトルである．ベクトル $(2,3)$ も L の法線ベクトルである．よって，ある定数 c をとると L は方程式 $2x+3y=c$ で表される．$\mathrm{P}=(5,1)$ は L に属すので，$2\cdot5+3\cdot1=c$ ，$c=13$ ．接線 L は方程式 $2x+3y=13$ で表される．



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.2.1}}$　xy 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(8,6)$ を中心とする円の点 $\mathrm{B}=(5,2)$ における接線 L を表す方程式を求めなさい．

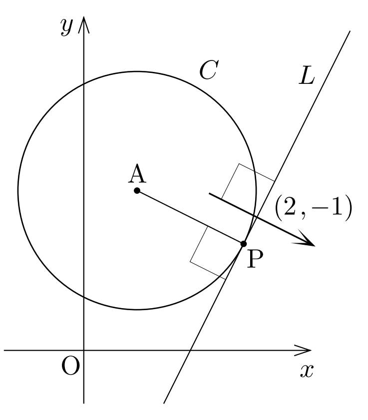
次の定理が成り立ちます（証明は略します）．

定理 5.2.2　座標平面における円 C と直線 L とについて，L が C の接線であることと，L を表す方程式と C を表す方程式との連立方程式の解が重解であることとは同値である．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(1,3)$ を中心とする円 C の接線 L が方程式 $2x-y=4$ で表されるとします．L と C との接点を求める．

〔方針〕 円 C と接線 L との接点は，C の中心 A から直線 L に下した垂線の足である．

〔解説〕 円 C と接線 L との接点を P とおく．$\mathrm{A}\notin L$ なので $\mathrm{P}\neq\mathrm{A}$ ．定理 5.2.1 より直線 AP と接線 L とは垂直なので，L の法線ベクトル $(2,-1)$ と直線 AP の法線ベクトルと垂直である．よってベクトル $(2,-1)$ は直線 AP の方向ベクトルである．従って，ある実数 t をとると，原点 O に対して，



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(2,-1)=(1,3)+(2t,-t)=(2t+1,-t+3)\ .$$

よって $\mathrm{P}=(2t+1,-t+3)$ ．P は方程式 $2x-y=4$ で表される直線 L に属すので，$2(2t+1)-(-t+3)=4$ ，$5t=5$ ，$t=1$ ．よって $\mathrm{P}=(2t+1,-t+3)=(3,2)$ ．L と C との接点は $(3,2)$ である．

〔別解〕 円 C の半径を r とおく．直線 L が円 C の接線なので，定理 5.2.2 より，L を表す方程式 $2x-y=4$ と C を表す方程式 $(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$ との連立方程式の解が重解である．$2x-y=4$ より $y=2x-4$ ；これを $(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$ に代入して x の 2 次式として平方完成する：

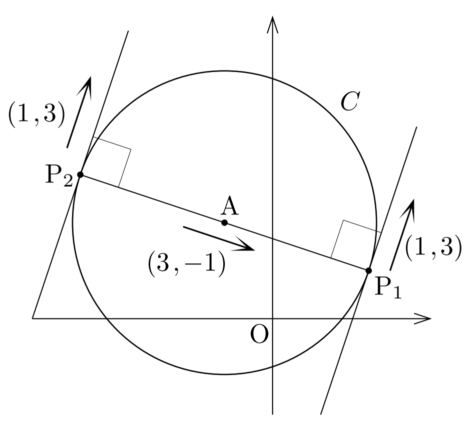
$$(x-1)^2+(2x-7)^2=r^2\ ,$$
$$5x^2-30x=r^2-50\ ,$$
$$5(x^2-6x+9)=r^2-50+45\ ,$$
$$5(x-3)^2=r^2-5\ .$$

この x に関する 2 次方程式の解が重解なので，$r^2-5=0$ ，$(x-3)^2=0$ ，$x=3$ ．このとき $y=2x-4=2$ ．L と C との接点は $(3,2)$ である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.2.2}}$　xy 座標平面において，方程式 $x+3y=9$ で表される直線 L が，点 $\mathrm{A}=(-4,1)$ を中心とする円 C に接するとします．L と C との接点を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　座標平面において，点 $\mathrm{A}=(-2,4)$ を中心とする半径が $2\sqrt{10}$ である円 C の接線 L の一つの方向ベクトルが $(1,3)$ であるとする．C と L との接点を求める．

〔解説〕 ベクトル $(1,3)$ が L の方向ベクトルなので，このベクトルと垂直なベクトル $(3,-1)$ は L の法線ベクトルである．C と L との接点を P とおく．直線 AP と接線 L とは垂直なので，直線 AP の方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と L の法線ベクトル $(3,-1)$ とは平行である．従ってある定数 k をとると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k(3,-1)$ ．$|(3,-1)|=\sqrt{10}$ なので，



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=|k(3,-1)|=|k||(3,-1)|=\sqrt{10}\,|k|\ .$$

点 P は円 C に属すので $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\overline{\mathrm{AP}}=2\sqrt{10}$ ，従って，$|k|\sqrt{10}=2\sqrt{10}$ ，$|k|=2$ ，$k=\pm2$ ．よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k(3,-1)=\pm2(3,-1)=\pm(6,-2)$ ．原点 O に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-2,4)\pm(6,-2)=(4,2),(-8,6)\ .$$

C と L との接点は $(4,2)$ であるかまたは $(-8,6)$ である．

〔別解〕 xy 座標平面において考える．接線 L の一つの方向ベクトルが $(1,3)$ なので，ある定数 c をとると，L は方程式 $3x-y=c$ で表される．直線 L が円 C の接線なので，定理 5.2.2 より，L を表す方程式 $3x-y=c$ と C を表す方程式 $(x+2)^2+(y-4)^2=40$ との連立方程式の解が重解である．$3x-y=c$ より $y=3x-c$ ；これを $(x+2)^2+(y-4)^2=40$ に代入して x の 2 次式として平方完成する：

$$(x+2)^2+(3x-c-4)^2=40\ ,$$
$$10x^2-(6c+20)x=-c^2-8c+20\ ,$$
$$10\left\{x^2-\frac{3c+10}{5}\cdot x+\left(\frac{3c+10}{10}\right)^2\right\}=-c^2-8c+20+\frac{(3c+10)^2}{10}\ ,$$
$$10\left(x-\frac{3c+10}{10}\right)^2=-\frac{c^2+20c-300}{10}\ .$$

この x に関する 2 次方程式の解が重解なので，$c^2+20c-300=0$ ，$(c-10)(c+30)=0$ ，$c=10$ または $c=-30$ ．よって $c=10$ または $c=-30$ ．このとき，$\left(x-\frac{3c+10}{10}\right)^2=0$ なので $x=\frac{3c+10}{10}$ ．$c=10$ のとき，$x=4$ かつ $y=3x-c=2$ ．$c=-30$ のとき，$x=-8$ かつ $y=3x-c=6$ ．C と L との接点は $(4,2)$ であるかまたは $(-8,6)$ である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.2.3}}$　座標平面において，ベクトル $(1,2)$ が方向ベクトルである直線 L が，点 $\mathrm{A}=(-3,4)$ を中心とする半径が $3\sqrt{5}$ である円 C に接するとします．C と L との接点を求めなさい．

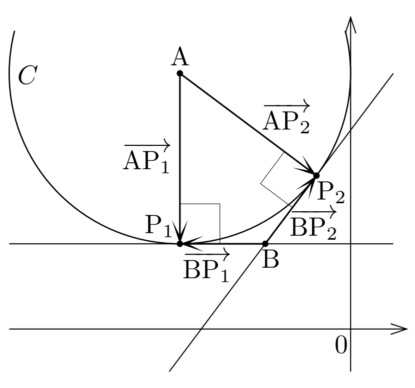
$\boxed{\text{例題}}$　座標平面において，点 $\mathrm{A}=(-2,3)$ を中心とする半径が 2 である円 C の接線 L に点 $\mathrm{B}=(-1,1)$ が属すとする．C と L との接点を求める．

〔解説〕 実数 x,y について，点 $\mathrm{P}=(x,y)$ が C の接線 L の接点であるとする．点 (x,y) が C に属すので，$(x+2)^2+(y-3)^2=4$ ，よって

$$x^2+y^2+4x-6y=-9\ .\qquad(1)$$

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,y)-(-2,3)=(x+2,y-3)$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,y)-(-1,1)=(x+1,y-1)$ とは垂直なので，$(x+2,y-3)\cdot(x+1,y-1)=0$ ，$(x+2)(x+1)+(y-3)(y-1)=0$ ，よって

$$x^2+y^2+3x-4y=-5\ .\qquad(2)$$



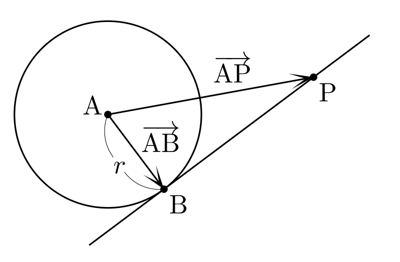
等式 (1) から等式 (2) を辺々引くと $x-2y=-4$ ，よって $x=2y-4$ ．これを方程式 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ に代入すると，$(2y-2)^2+(y-3)^2=4$ ，$5y^2-14y+9=0$ ，$(y-1)(5y-9)=0$ ，$y=1$ または $y=\frac{9}{5}$ ．$x=2y-4$ なので，$(x,y)=(-2,1)$ または $(x,y)=\left(-\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$ ．C と L との接点は $(-2,1)$ であるかまたは $\left(-\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$ である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.2.4}}$　座標平面において，点 $\mathrm{A}=(2,-1)$ が属す直線 L が，点 $\mathrm{B}=(-1,-2)$ を中心とする半径が 3 である円 C に接するとします．C と L との接点を求めなさい．

――――― 円の接線を表す方程式

定理　座標平面において，点 A を中心とする半径が実数 r である円の点 B（但し $\mathrm{B}\neq\mathrm{A}$ ）における接線を L とおく．各点 P について

$$\mathrm{P}\in L\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=r^2\ .$$



証明　定理 5.2.1 より接線 L と直線 AB とは垂直である．よってベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は接線 L の法線ベクトルである．点 B は L に属すので，定理 3.3.1 より，各点 P について

$$\mathrm{P}\in L\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0\ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．B は A を中心とする半径 r の円に属すので $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\overline{\mathrm{AB}}=r$ ．これらのことより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-r^2\ .\end{aligned}$$

故に，各点 P について

$$\mathrm{P}\in L\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-r^2=0\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=r^2\ .$$

（証明終り）

この定理より円の接線を表す方程式の公式が導かれます．

定理　a,b,r,x_0,y_0 は定数とする．xy 座標平面において，点 (a,b) を中心とする半径が実数 r である円の点 (x_0,y_0) における接線は方程式

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

で表される．特に，原点 $(0,0)$ を中心とする半径 r の円の点 (x_0,y_0) における接線は方程式

$$x_0x+y_0y=r^2$$

で表される．

証明　$\mathrm{A}=(a,b)$ ，$\mathrm{B}=(x_0,y_0)$ ，$\mathrm{P}=(x,y)$ とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_0}=(x_0,y_0)-(a,b)=(x_0-a,y_0-b)\ ,\quad\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,y)-(a,b)=(x-a,y-b)\ .$$

上述の定理より，

$$\begin{aligned}(x,y)\in L&\iff\mathrm{P}\in L\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=r^2\\&\iff(x_0-a,y_0-b)\cdot(x-a,y-b)=r^2\\&\iff(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2\ .\end{aligned}$$

接線 L は方程式 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ で表される．　（証明終り）