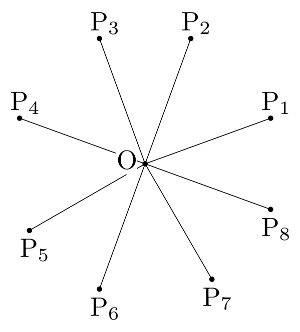
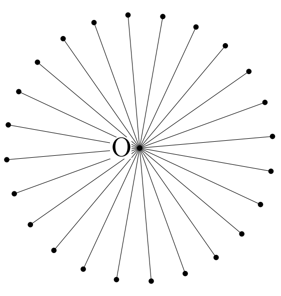
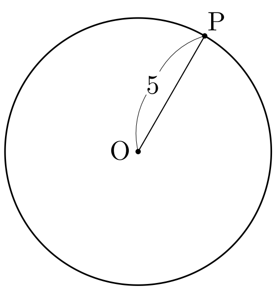
§5.1　円

座標平面 $\mathbf{R}^2$ において点 O を定めます.







上の左側の図において，$\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_8$ は次の条件を満たします：

$$\overline{\mathrm{OP}_1} = 5\ ,\quad \overline{\mathrm{OP}_2} = 5\ ,\quad \overline{\mathrm{OP}_3} = 5\ ,\quad \cdots\quad ,\quad \overline{\mathrm{OP}_8} = 5\ .$$

このように，$\overline{\mathrm{OP}} = 5$ となる点 P を沢山とると上の真中の図のようになります．そして更にこのような点を総て集めると上の右側の図のような曲線になります．このような曲線を**円** (circle) といい，定点 O を**中心** (center) といい，この円に属す点 P に対する $\overline{\mathrm{OP}} = 5$ の値を**半径** (radius) といいます.

定義　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 O 及び 0 以上の実数 r に対して，$\overline{\mathrm{OP}} = r$ となる点 P の全体

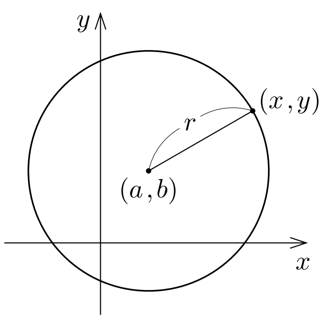
$$\{\ \mathrm{P} \in \mathbf{R}^2 \mid \ \overline{\mathrm{OP}} = r\ \ \}$$

を，点 O を中心とする半径が r である円という.

この定義より，座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，点 O を中心として実数 r （ $r \geq 0$ ）を半径とする円とは次のような図形 C のことです：

$$\mathbf{R}^2 \text{ の各点 P について}\quad \mathrm{P} \in C \iff \overline{\mathrm{OP}} = r\ .$$

定理 5.1　a, b, r は定数で $r \geq 0$ とする．xy 座標平面において，中心が点 (a,b) であり半径が r である円は方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ で表される；逆に，方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ で表される図形は円であり中心は点 (a,b) であり半径は r である.



証明　座標平面の点 O を $\mathrm{O} = (a,b)$ とおく．座標平面の点 $\mathrm{P} = (x,y)$ について，$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}} = r &\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}^{\,2} = r^2 \\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2\ .\end{aligned}$$

定数 a, b, r に対して，xy 座標平面において点 (a,b) を中心とする半径が r である円を C とおく．座標平面の各点 $\mathrm{P} = (x,y)$ について，

$$(x,y) \in C \iff \mathrm{P} \in C \iff \overline{\mathrm{OP}} = r \iff (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2\ .$$

従って円 C は方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ で表される.

逆に，定数 a, b, r に対して，xy 座標平面において方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ が表す図形を C とおく．xy 座標平面の各点 $\mathrm{P} = (x,y)$ について

$$\mathrm{P} \in C \iff (x,y) \in C \iff (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \iff \overline{\mathrm{OP}} = r\ .$$

従って図形 C は点 $\mathrm{O} = (a,b)$ を中心とする半径が r である円である.

（証明終り）

例題　xy 座標平面において点 $\left(\frac{7}{2}, -5\right)$ を中心とする半径が 3 である円を表す方程式を求める.

点 $\left(\frac{7}{2}, -5\right)$ を中心とする半径が 3 である円の方程式は $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y+5)^2 = 9$.

終

問題 5.1.1　xy 座標平面において点 $\left(-3, \frac{8}{5}\right)$ を中心とする半径が 7 である円 C を表す方程式を求めなさい.

例題　xy 座標平面において点 $(-3,5)$ を中心とする円 C に点 $(2,1)$ が属すとする．C を表す方程式を求める.

円 C の半径 r は点 $(-3,5)$ と点 $(2,1)$ との間の距離なので，

$$r^2 = (-3-2)^2+(5-1)^2 = 25+16 = 41\ .$$

円 C は方程式は $(x+3)^2+(y-5)^2 = 41$ で表される.　終

問題 5.1.2　xy 座標平面において円 C の中心は点 $(5,-9)$ であり点 $(-2,-6)$ が C に属すとします．C を表す方程式を求めなさい.

例題　座標平面において，点 $(3,-1)$ と点 $(2,-4)$ と点 $(7,1)$ とが属す円 C の中心と半径とを求める.

定数 a, b に対して，点 (a,b) が円 C の中心であるとする．点 (a,b) は点 $(3,-1)$ との間の距離と点 $(2,-4)$ との間の距離とが等しいので，

$$(a-3)^2+(b+1)^2 = (a-2)^2+(b+4)^2\ ,$$
$$a^2-6a+9+b^2+2b+1 = a^2-4a+4+b^2+8b+16\ ,$$

整理すると，$-2a-6b = 10$ ，$a+3b = -5$ ．また，点 (a,b) は点 $(3,-1)$ との間の距離と点 $(7,1)$ との間の距離にとが等しいので，

$$(a-3)^2+(b+1)^2 = (a-7)^2+(b-1)^2\ ,$$
$$a^2-6a+9+b^2+2b+1 = a^2-14a+49+b^2-2b+1\ ,$$

整理すると，$8a+4b = 40$ ，$2a+b = 10$ ．これらの方程式より $a = -7$ かつ $b = -4$ ．故に円 C の中心は $(7,-4,7)$ である．円 C の半径は $\sqrt{(7-3)^2+(-4-1)^2} = \sqrt{41}$ である.　終

問題 5.1.3　座標平面において，点 $(-1,4)$ と点 $(3,6)$ と点 $(-2,3)$ とが属す円 C の中心と半径とを求めなさい.

例題　座標平面において，半径が 5 である円 C に点 $(5,6)$ と点 $(1,-2)$ とが属すとする．円 C の中心を求める.

定数 a, b に対して，点 (a,b) が円 C の中心であるとする．点 (a,b) は点 $(5,6)$ との間の距離と点 $(1,-2)$ との間の距離とが等しいので，

$$(a-5)^2+(b-6)^2 = (a-1)^2+(b+2)^2\ ,$$
$$a^2-10a+25+b^2-12b+36 = a^2-2a+1+b^2+4b+4\ ,$$

整理すると，$-8a-16y = -56$ ，$a = 7-2b$ ．点 $(a,b) = (7-2b, b)$ と点 $(1,-2)$ との間の距離が 5 なので，

$$(7-2b-1)^2+(b+2)^2 = 25\ ,$$
$$4b^2-24b+36+b^2+4b+4-25\ ,$$
$$b^2-4b+3 = 0\ ,$$

$b = 1$ または $b = 3$ ．$a = 7-2b$ なので，$b = 1$ のとき $a = 5$ ，$b = 3$ のとき $a = 1$ ．故に円 C の中心は $(1,3)$ または $(5,1)$ である.　終

問題 5.1.4　座標平面において，点 $(1,-4)$ と点 $(7,8)$ とが属し半径が $5\sqrt{2}$ である円 C の中心を求めなさい.

変数 x と y とに関する 2 次方程式は,

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = c\quad (\ a, b, c \text{ は定数で } c \geq 0\ )$$

の形に同値変形できれば，定理 5.1 より，xy 座標平面において点 (a,b) が中心であり半径が $\sqrt{c}$ である円を表します．この形に変形するために 2 次式の平方完成を用います.

$$x^2+2\cdot\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{\square}{2}\right)^2\ .$$

例題　xy 座標平面において方程式 $3x^2+3y^2-8x+5y = -2$ が表す図形は円であることを示し，その中心と半径とを求める.

〔解説〕 まず方程式 $3x^2+3y^2-8x+5y = -2$ の両辺を x^2 及び y^2 の係数の 3 で割る；

$$x^2+y^2-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}y = -\frac{2}{3}\ ,$$
$$x^2-\frac{8}{3}x+y^2+\frac{5}{3}y = -\frac{2}{3}\ .$$

x の係数 $-\frac{8}{3} = -2\cdot\frac{4}{3}$ の絶対値の $\frac{1}{2}$ の 2 乗 $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ と y の係数 $\frac{5}{3} = 2\cdot\frac{5}{6}$ の絶対値の $\frac{1}{2}$ の 2 乗 $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ とを両辺に足す：

$$x^2-2\cdot\frac{4}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2+y^2+2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3}+\frac{16}{9}+\frac{25}{36}\ ,$$
$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{65}{36}\ .$$

これらの変形は同値変形である：

$$3x^2+3y^2-8x+5y = 1 \iff \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{65}{36}\ .$$

方程式 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{65}{36}$ が表す図形は点 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{\frac{65}{36}} = \frac{\sqrt{65}}{6}$ の円である．故に，方程式 $3x^2+3y^2-8x+5y = 1$ が表す図形は円であり，その中心は $\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right)$ であり半径は $\frac{\sqrt{65}}{6}$ である.　終

問題 5.1.5　xy 座標平面において方程式 $5x^2+5y^2+8x-6y = 2$ が表す図形は円であることを示し，その中心と半径とを求めなさい.