§4.9　内分点と外分点

定義　実数 m,n について $m \geq 0$, $n \geq 0$, $m+n>0$ とする．座標空間において，点 A と B とに対して点 P が線分 AB を $m:n$ に**内分する**とは，

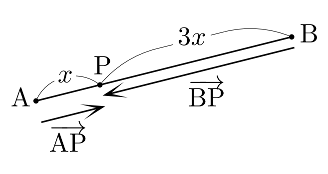
$$\text{ベクトル } \overrightarrow{\mathrm{AP}} \text{ と } \overrightarrow{\mathrm{BP}} \text{ とが逆の向きで，} \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n$$

となることであり，$m \neq n$ のとき，$\mathbf{R}^2$ の点 P が線分 AB を $m:n$ に**外分する**とは，

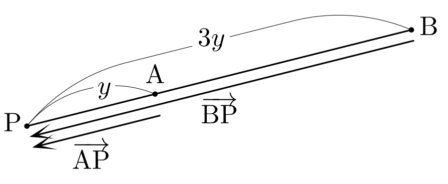
$$\text{ベクトル } \overrightarrow{\mathrm{AP}} \text{ と } \overrightarrow{\mathrm{BP}} \text{ とが同じ向きで，} \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n$$

となることである．

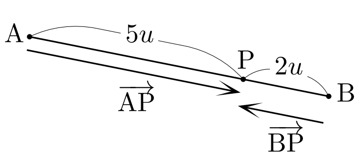
例　以下において，A, B, P は座標空間の点を表し，x,y,u,v は長さを表します．



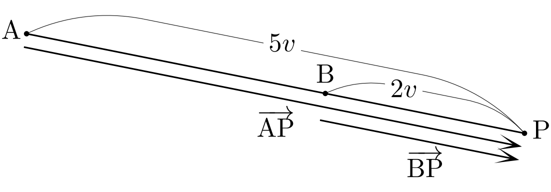
点 P が線分 AB を 1 : 3 に内分する



点 P が線分 AB を 1 : 3 に外分する



点 P が線分 AB を 5 : 2 に内分する

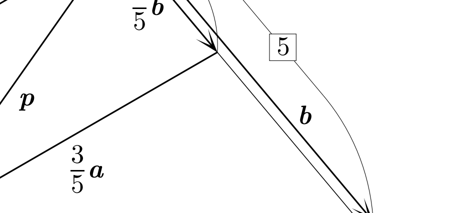


点 P が線分 AB を 5 : 2 に外分する

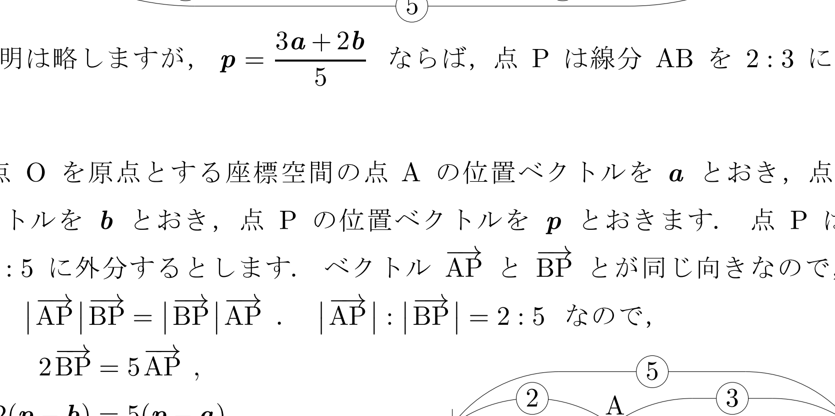
終

例解　点 O を原点とする座標空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおき，点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とおきます．点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分するとします．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とが逆の向きなので，定理 3.4.4 より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ ．$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=2:3$ なので，

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= -3\overrightarrow{\mathrm{AP}} , \\ 2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}) &= -3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) , \\ 5\boldsymbol{p} &= 3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b} , \\ \boldsymbol{p} &= \frac{3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}}{5} . \end{aligned}$$



この式は次の図のように考えて導くこともできます．

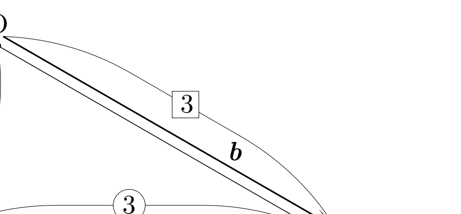


逆に，説明は略しますが，$\boldsymbol{p}=\dfrac{3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}}{5}$ ならば，点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分します．

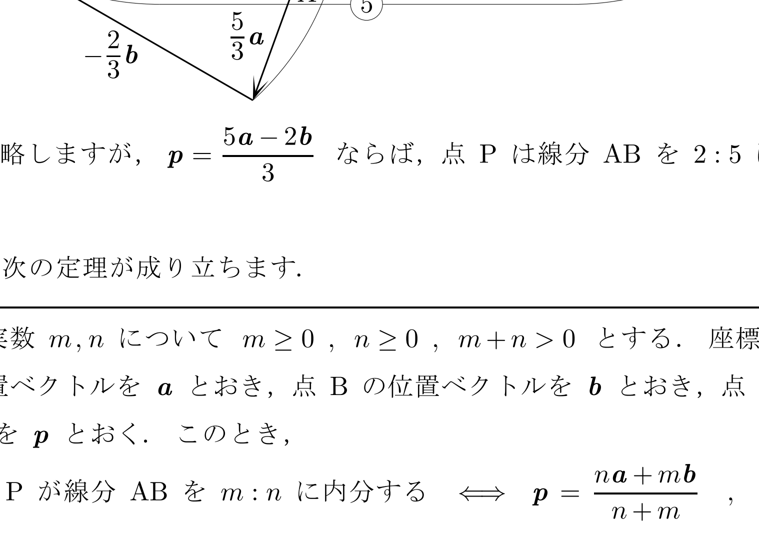
終

例解　点 O を原点とする座標空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおき，点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とおきます．点 P は線分 AB を 2 : 5 に外分するとします．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とが同じ向きなので，定理 3.4.4 より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ ．$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=2:5$ なので，

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= 5\overrightarrow{\mathrm{AP}} , \\ 2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}) &= 5(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) , \\ 3\boldsymbol{p} &= 5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b} , \\ \boldsymbol{p} &= \frac{5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}}{3} . \end{aligned}$$



この式は次の図のように考えて導くこともできます．



逆に，説明は略しますが，$\boldsymbol{p}=\dfrac{5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}}{3}$ ならば，点 P は線分 AB を 2 : 5 に外分します．

終

一般的には次の定理が成り立ちます．

定理 4.9　実数 m,n について $m \geq 0$, $n \geq 0$, $m+n>0$ とする．座標空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおき，点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とおく．このとき，

$$\text{点 P が線分 AB を } m:n \text{ に内分する} \iff \boldsymbol{p}=\frac{n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{n+m} ,$$

$m \neq n$ のとき

$$\text{点 P が線分 AB を } m:n \text{ に外分する} \iff \boldsymbol{p}=\frac{n\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}}{n-m} .$$

証明　$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ のときを考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a} , \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b} , \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\overline{\mathrm{AP}} , \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=\overline{\mathrm{BP}} .$$

点 P が線分 AB を $m:n$ に内分すると仮定する．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とが逆の向きなので，定理 3.4.4 より

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= -\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\overrightarrow{\mathrm{BP}} , \\ \overline{\mathrm{BP}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) &= -\overline{\mathrm{AP}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}) , \end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n$ なので

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) &= -m(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}) , \\ (n+m)\boldsymbol{p} &= n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b} , \end{aligned}$$

$m+n>0$ なので $\boldsymbol{p}=\dfrac{n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{n+m}$ ．

$m \neq n$ で，点 P が線分 AB を $m:n$ に外分すると仮定する．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とが同じ向きなので，定理 3.4.4 より

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\overrightarrow{\mathrm{BP}} , \\ \overline{\mathrm{BP}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) &= \overline{\mathrm{AP}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}) , \end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n$ なので

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) &= m(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}) , \\ (n-m)\boldsymbol{p} &= n\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b} , \end{aligned}$$

$n-m \neq 0$ なので $\boldsymbol{p}=\dfrac{n\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}}{n-m}$ ．

$\boldsymbol{p}=\dfrac{n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{n+m}$ と仮定する．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}=\frac{n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{n+m}-\boldsymbol{a}=\frac{-m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{n+m}=-\frac{m}{n+m}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) , \\ \overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}=\frac{n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{n+m}-\boldsymbol{b}=\frac{n\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}}{n+m}=\frac{n}{n+m}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) . \end{aligned}$$

$-\dfrac{m}{n+m}\cdot\dfrac{n}{n+m}=-\dfrac{mn}{(n+m)^2} \leq 0$ なので，定理 3.4.3 より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とは逆の向きである．また，$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ より $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \neq 0$ なので，

$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=\frac{m}{n+m}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|:\frac{n}{n+m}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=m:n .$$

故に点 P は線分 AB を $m:n$ に内分する．

$m \neq n$ で，$\boldsymbol{p}=\dfrac{n\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}}{n-m}$ と仮定する．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}=\frac{n\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}}{n-m}-\boldsymbol{a}=\frac{m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}}{n-m}=\frac{m}{n-m}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) , \\ \overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}=\frac{n\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}}{n-m}-\boldsymbol{b}=\frac{n\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}}{n-m}=\frac{n}{n-m}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) . \end{aligned}$$

$\dfrac{m}{n-m}\cdot\dfrac{n}{n-m}=\dfrac{mn}{(n-m)^2} \geq 0$ なので，定理 3.4.3 より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とは同じ向きである．また，$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ より $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \neq 0$ なので，

$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=\frac{m}{n+m}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|:\frac{n}{n+m}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=m:n .$$

故に点 P は線分 AB を $m:n$ に外分する．（証明終り）

例題　座標平面の点 (4,7) と点 (−6,3) とを結ぶ線分を 5 : 2 に内分する点 P を求める．

ベクトル (4,7) と (−6,3) とに対して，点 P の位置ベクトルは

$$\frac{2(4,7)+5(-6,3)}{2+5}=\frac{(8,14)+(-30,15)}{7}=\frac{(-22,29)}{7}=\left(-\frac{22}{7},\frac{29}{7}\right) .$$

よって $\mathrm{P}=\left(-\dfrac{22}{7},\dfrac{29}{7}\right)$ ．

終

問題 4.9.1　座標平面の点 (1,4) と点 (5,−9) とを結ぶ線分を 2 : 7 に内分する点 P を求めなさい．

例題　座標平面の点 (8,9) と点 (4,5) と結ぶ線分を 7 : 2 に外分する点 P を求める．

ベクトル (8,9) と (4,5) とに対して，点 P の位置ベクトルは

$$\frac{2(8,9)-7(4,5)}{2-7}=\frac{(16,18)-(28,35)}{-5}=\frac{(-12,-17)}{-5}=\left(\frac{12}{5},\frac{17}{5}\right) .$$

よって $\mathrm{P}=\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{17}{5}\right)$ ．

終

問題 4.9.2　座標平面の点 (1,6) と点 (2,4) と結ぶ線分を 8 : 5 に外分する点 P を求めなさい．

例題　座標平面の点 A の位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ と点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとする．直線 AB に属す点 P の位置ベクトルがベクトル $7\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ と平行であるとき，P は線分 AB をどのような比に内分あるいは外分する点か調べる．

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは，平行でないので，線形独立である．定理 3.7.3 より $7\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b} \neq 0$ ．点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ がベクトル $7\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ と平行なので，定理 3.5.4 より，ある実数 k をとると $\boldsymbol{p}=k(7\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=7k\boldsymbol{a}-4k\boldsymbol{b}$ ．点 P は直線 AB に属すので，定理 3.5.2 より，$7k-4k=1$ ，$k=\dfrac{1}{3}$ ．よって

$$\boldsymbol{p}=\frac{7}{3}\boldsymbol{a}+\frac{4}{3}\boldsymbol{b}=\frac{7\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}}{7-4} .$$

定理 4.9 より，点 P は線分 AB を 4 : 7 に外分する．

終

問題 4.9.3　座標平面の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとします．直線 AB に属す点 P の位置ベクトルがベクトル $5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ と平行であるとき，P は線分 AB をどのような比に内分あるいは外分する点か調べなさい．

問題 4.9.4　座標平面の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとします．直線 AB に属す点 P の位置ベクトルがベクトル $-2\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}$ と平行であるとき，P は線分 AB をどのような比に内分あるいは外分する点か調べなさい．

座標空間の点 A と B とに対して，線分 AB を 1 : 1 に内分する点を線分 AB の**中点**といいます．定理 4.9 よりすぐに次の定理が導けます．

定理　座標空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおくと，線分 AB の中点の位置ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$ ．