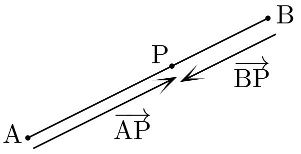
§4.8　線分

座標空間において，点 A と B とを結ぶ線分 AB とは，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とが逆の向きである点 P の全体

$$\{\,\mathrm{P}\mid\mathrm{P}\ \text{は座標空間の点で}\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\ \text{と}\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}\ \text{とが逆の向き}\,\}\ .$$

です．座標空間の点 A と B と P とについて，

点 P が線分 AB に属す
$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とが逆の向きである
$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\bigl|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\bigr|\bigl|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\bigr|$.



定理　座標空間の点 A と B とについて，$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ のとき，線分 AB は直線 AB に含まれる．

証明　座標空間の点 A と B と P とについて，P が線分 AB に属すとする． ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とは逆の向きなので， $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ ，よって $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ ． 定理 4.1.5 より点 A と B と P が属す直線がある． 故に点 P は直線 AB に属す.

（証明終り）

定理 4.8　座標空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおき，点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とおく． 点 P が線分 AB に属すことは次のことと同等である：ある実数 t をとると， $\boldsymbol{p}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$ かつ $0\leq t\leq 1$ ．

証明　点 P が線分 AB に属すとする． $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ とする． ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とが逆の向きなので，定理 3.4.4 より

$$\bigl|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\bigr|\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\bigl|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\bigr|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}$ ， $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}$ ， $\bigl|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\bigr|=\overline{\mathrm{AP}}$ ， $\bigl|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\bigr|=\overline{\mathrm{BP}}$ なので，

$$\overline{\mathrm{AP}}\,(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})=-\overline{\mathrm{BP}}\,(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})\ ,$$
$$\bigl(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\bigr)\boldsymbol{p}=\overline{\mathrm{BP}}\,\boldsymbol{a}+\overline{\mathrm{AP}}\,\boldsymbol{b}\ .$$

$\overline{\mathrm{AP}}\geq 0$ かつ $\overline{\mathrm{BP}}\geq 0$ なので， $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=0$ とすると， $\overline{\mathrm{AP}}=0$ かつ $\overline{\mathrm{BP}}=0$ ， $\mathrm{P}=\mathrm{A}$ かつ $\mathrm{P}=\mathrm{B}$ ；これは $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ に矛盾する． よって $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\neq 0$ なので，

$$\boldsymbol{p}\ =\ \frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}}\,\boldsymbol{a}+\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}}\,\boldsymbol{b}\ .$$

$t=\dfrac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}}$ とおく． $\dfrac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}}=1$ なので $\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}}=1-t$ ． よって $\boldsymbol{p}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$ ． $0\leq\overline{\mathrm{BP}}\leq\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ なので $0\leq\dfrac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}}\leq 1$ つまり $0\leq t\leq 1$ ．

逆に，実数 t について $0\leq t\leq 1$ で $\boldsymbol{p}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(t-1)\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}=(t-1)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}=t(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\ .$$

$0\leq t\leq 1$ より $(t-1)\cdot t\leq 0$ なので，定理 3.4.3 より， $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とは逆の向きである． 故に点 P は線分 AB に属す.

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　座標空間の点 A と B とについて $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ とする． 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおく． 次のような実数 x を求める：ベクトル $2x\boldsymbol{a}+x^2\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が線分 AB に属す.

$2x\boldsymbol{a}+x^2\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が直線 AB に属す条件は， $2x+x^2=1$ かつ $0\leq 6x\leq 1$ ． 方程式 $2x+x^2=1$ を解くと $x=-1\pm\sqrt{2}$ ． 不等式 $0\leq 2x\leq 1$ を解くと $0\leq x\leq\dfrac{1}{2}$ ． この 2 条件より $x=\sqrt{2}-1$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.8}}$　座標空間の点 A と B とについて $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ とします． 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおきます． 次のような実数 x を求めなさい：ベクトル $x^2\boldsymbol{a}+4x\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が線分 AB に属す.