§4.7　3次元座標空間における平面

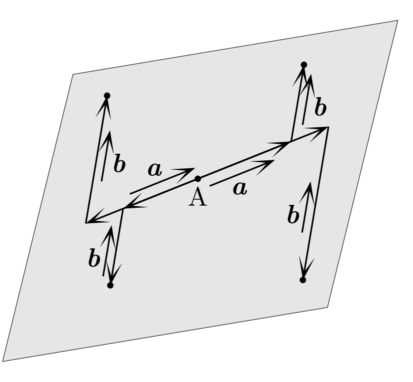
4.1節で述べたように，座標空間において，点 A と零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{k}$ とにより定められる直線は，次のような図形 L です：各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k} \quad .$$

3次元座標空間において，点 A と線形独立であるベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とにより定められる平面は，次のような図形 Π です：各点 P について

$$\mathrm{P}\in \Pi \iff \text{ある実数 } s,t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b} \quad .$$

このように，ベクトルを用いて直線を定めるようにベクトルを用いて平面を定めようとすると，線形独立な2個のベクトルを考える必要があります．それより，平面内の直線の法線ベクトルを考えたのと同様に，3次元空間内の平面に垂直なベクトルを考えます．



定理　実数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 について，3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とに対して3次元実ベクトル $\boldsymbol{n}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$ を考えると，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$ かつ $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$ で，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立であるならば $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$ ．

証明（一部）　次のことだけ示す：ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ と $\boldsymbol{n}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$ とについて $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$ かつ $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{n}$ ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}&=(a_1,a_2,a_3)\cdot(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\\&=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)\\&=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_1a_2b_3+a_1a_3b_2-a_2a_3b_1\\&=0\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}&=(b_1,b_2,b_3)\cdot(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\\&=b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)\\&=a_2b_1b_3-a_3b_1b_2+a_3b_1b_2-a_1b_2b_3+a_1b_2b_3-a_2b_1b_3\\&=0\ .\end{aligned}$$

（証明終り）

平面 Π に対して，ある点 A と線形独立であるある3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とをとると，各点 P について

$$\mathrm{P}\in \Pi \iff \text{ある実数 } s,t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b} \quad .$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との両方に垂直な零ベクトルでない3次元実ベクトル $\boldsymbol{n}$ を作れます．$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$ かつ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}=0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ ならば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\boldsymbol{n}=(s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}=s\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}+t\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}=0\ ,$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\boldsymbol{n}$ ．逆に，証明は略しますが，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\boldsymbol{n}$ ならば，ある実数 s,t をとると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ ．よって

$$\text{ある実数 } s,t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\boldsymbol{n} \quad .$$

故に

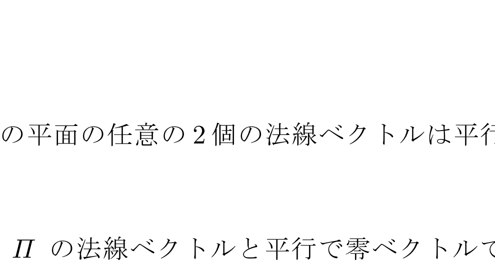
$$\mathrm{P}\in\Pi \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\boldsymbol{n} \quad .$$

このようにして次の定理が導かれます．その証明は略します[1]．

定理 4.7.1　3次元座標空間において，点集合 Π が平面であることと次の条件とは同値である：零ベクトルでないあるベクトル $\boldsymbol{n}$ とある点 A とをとると，

$$\text{各点 P について}\quad \mathrm{P}\in\Pi \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\boldsymbol{n} \quad .$$

3次元座標空間において，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{n}$ と定点 A とに対して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\boldsymbol{n}$ となる点 P の全体 Π は平面ですが，このときベクトル $\boldsymbol{n}$ を平面 Π の法線ベクトルといいます．直感的にいうと，平面の法線ベクトルとはその平面と垂直なベクトルのことです．



定義　3次元座標空間において，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{n}$ が平面 Π の法線ベクトルであるとは次の条件が成り立つことである：ある点 A をとると，

$$\text{各点 P について}\quad \mathrm{P}\in\Pi \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\boldsymbol{n} \quad .$$

以下の二つの定理の証明は略します．

定理 4.7.2　3次元座標空間において，一つの平面の任意の2個の法線ベクトルは平行である．

定理 4.7.3　3次元座標空間において，平面 Π の法線ベクトルと平行で零ベクトルでない任意のベクトルは Π の法線ベクトルである．

定理 4.7.4　定数 a,b,c について $a\neq0$ または $b\neq0$ または $c\neq0$ とする．xyz 座標空間において，ベクトル (a,b,c) を法線ベクトルとする平面は，ある定数 d をとると方程式 $ax+by+cz=d$ で表される．

証明　xyz 座標空間において，ベクトル (a,b,c) は平面 Π の法線ベクトルであるとする．変数 x,y,z に対して $\mathrm{P}=(x,y,z)$ とおく．ベクトル (a,b,c) が平面 Π の法線ベクトルなので，ある点 P_0 をとると，

$$\mathrm{P}\in\Pi \iff \overrightarrow{\mathrm{P_0P}}\perp(a,b,c) \quad .$$

定数 x_0,y_0,z_0 に対して $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}=(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)$ なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}\perp(a,b,c) &\iff (x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\perp(a,b,c)\\&\iff \{(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\}\cdot(a,b,c)=0\\&\iff (x,y,z)\cdot(a,b,c)-(x_0,y_0,z_0)\cdot(a,b,c)=0\\&\iff (x,y,z)\cdot(a,b,c)=(x_0,y_0,z_0)\cdot(a,b,c)\\&\iff ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0\ ,\end{aligned}$$

$d=ax_0+by_0+cz_0$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}\perp(a,b,c) \iff ax+by+cz=d\ .$$

これらのことより，

$$(x,y,z)\in\Pi \iff \mathrm{P}\in\Pi \iff \overrightarrow{\mathrm{P_0P}}\perp(a,b,c) \iff ax+by+cz=d\ .$$

故に平面 Π は方程式 $ax+by+cz=d$ で表される．　（証明終り）

定理 4.7.5　定数 a,b,c について $a\neq0$ または $b\neq0$ または $c\neq0$ とする．xyz 座標空間において，ある定数 d に対して方程式 $ax+by+cz=d$ が表す点集合はベクトル (a,b,c) を法線ベクトルとする平面である．

証明　各点 P に対して，変数 x,y,z をとり $\mathrm{P}=(x,y,z)$ とおく．また点 $\mathrm{P}_0=\left(\frac{ad}{a^2+b^2+c^2},\frac{bd}{a^2+b^2+c^2},\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right)$ を考える．

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}\perp(a,b,c) \iff \overrightarrow{\mathrm{P_0P}}\cdot(a,b,c)=0\\&\iff \left\{(x,y,z)-\left(\frac{ad}{a^2+b^2+c^2},\frac{bd}{a^2+b^2+c^2},\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right)\right\}\cdot(a,b,c)=0\\&\iff (x,y,z)\cdot(a,b,c)-\left(\frac{ad}{a^2+b^2+c^2},\frac{bd}{a^2+b^2+c^2},\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right)\cdot(a,b,c)=0\\&\iff (x,y,z)\cdot(a,b,c)=\left(\frac{ad}{a^2+b^2+c^2},\frac{bd}{a^2+b^2+c^2},\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right)\cdot(a,b,c)\\&\iff ax+by+cz=\frac{a^2d+b^2d+c^2d}{a^2+b^2+c^2}\\&\iff ax+by+cz=d\ .\end{aligned}$$

xyz 座標空間において方程式 $ax+by+cz=d$ が表す点集合を Π とおく．

$$ax+by+cz=d \iff (x,y,z)\in\Pi \iff \mathrm{P}\in\Pi\ ,$$

故に

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}\perp(a,b,c) \iff ax+by+c=d \iff \mathrm{P}\in\Pi\ .$$

よって Π はベクトル (a,b,c) を法線ベクトルとする平面である．　（証明終り）

例題　xyz 座標空間において，ベクトル $(3,-4,5)$ が平面 Π の法線ベクトルであり，点 $(6,-7,-8)$ が Π に属すとする．平面 Π を表す方程式を求める．

ベクトル $(3,-4,5)$ が平面 Π の法線ベクトルなので，ある定数 d をとると，Π は方程式 $3x-4y+5z=d$ で表される．点 $(6,-7,-8)$ が Π に属すので，$3\cdot6-4\cdot(-7)+5\cdot(-8)=d$ ，よって $d=6$ ．Π は方程式 $3x-4y+5z=6$ で表される．　終

問題 4.7.1　xyz 座標空間において，ベクトル $(2,-3,4)$ が平面 Π の法線ベクトルであり，点 $(7,-8,-9)$ が Π に属すとする．平面 Π を表す方程式を求めなさい．

定理4.7.1より，xyz 座標空間において，任意の平面 Π に対して，ある定数 a,b,c（$a\neq0$ または $b\neq0$ または $c\neq0$）をとると，ベクトル (a,b,c) は Π の法線ベクトルです．定理4.7.4より，ある定数 d をとると，Π は方程式 $ax+by+cz=d$ で表されます．

例題　xyz 座標空間において点 $(4,-3,2)$ と $(5,1,-4)$ と $(6,-1,-2)$ とが属す平面 Π を表す方程式を求める．

ある定数 a,b,c（$a\neq0$ または $b\neq0$ または $c\neq0$）に対して，平面 Π は方程式を $ax+by+cz=d$ で表される．

点 $(4,-3,2)$ が Π に属すので $4a-3b+2c=d\ \cdots(1)$ ．

点 $(5,1,-4)$ が Π に属すので $5a+b-4c=d\ \cdots(2)$ ．

点 $(6,-1-2)$ が Π に属すので $6a-b-2c=d\ \cdots(3)$ ．

等式(1)と(3)とを辺々足すと，$10a-4b=2d$ ，$5a-2b=d\ \cdots(4)$ ．

等式(1)より $8a-6b+4c=2d$ ，これと等式(2)とを辺々足すと $13a-5b=3d\ \cdots(5)$ ．

等式(5)より $26a-10b=6d$ ，等式(4)より $25a-10b=5d$ ，辺々引くと $a=d$ ．

等式(4)より $2b=5a-d=5d-d=4d$ ，$b=2d$ ．

等式(1)より $2c=d-4a+3b=d-4d+6d=3d$ ，$c=\frac{3}{2}d$ ．

よって $(a,b,c)=\left(d,2d,\frac{3}{2}d\right)$ ．$d=0$ とすると $a=b=c=0$ ；$a\neq0$ または $b\neq0$ または $c\neq0$ なので，$d\neq0$ ．平面 Π を表す方程式は，$dx+2dy+\frac{3}{2}dz=d$ ，$2x+4y+3z=2$ ．　終

問題 4.7.2　xyz 座標空間において点 $(3,-1,-4)$ と $(5,-3,-6)$ と $(-5,6,1)$ とが属す平面 Π を表す方程式を求めなさい．

例題　xyz 座標空間において，点 $(5,4,-3)$ が属しベクトル $(-2,3,4)$ を方向ベクトルとする直線と，方程式 $4x+5y-6z=7$ が表す平面との共有点 P の座標を求める．

点 $(5,4,-3)$ が属しベクトル $(-2,3,4)$ を方向ベクトルとする直線に点 P が属すので，定理4.1.6より，原点 O に対して，ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(5,4,-3)+t(-2,3,4)=(-2t+5,3t+4,4t-3)\ ,$$

よって $\mathrm{P}=(-2t+5,3t+4,4t-3)$ ．この点が方程式 $4x+5y-6z=7$ が表す平面に属すので，$4(-2t+5)+5(3t+4)-6(4t-3)=7$ ，$-17t+58=7$ ，$t=3$ ．故に $\mathrm{P}=(-2t+5,3t+4,4t-3)=(-1,13,9)$ ．　終

問題 4.7.3　xyz 座標空間において，点 $(-5,4,3)$ が属しベクトル $(2,3,-4)$ を方向ベクトルとする直線と，方程式 $3x+4y+5z=8$ が表す平面との共有点 P の座標を求めなさい．

3次元空間における二つの平面の平行とか垂直とかを厳密に定義してないので，今のところ次の定理が二つの平面の平行及び垂直の定義のようなものです．その証明は略します．

定理 4.7.6　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において，平面 Π_1 の任意の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ と平面 Π_2 の任意の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_2$ とについて，

$$\begin{aligned}\Pi_1 /\!/ \Pi_2 &\iff \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \quad ,\\ \Pi_1 \perp \Pi_2 &\iff \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \quad .\end{aligned}$$

3次元空間における直線と平面との垂直を厳密に定義してないので，今のところ次の定理が直線と平面との垂直の定義のようなものです．その証明は略します．

定理 4.7.7　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において，直線 L の任意の方向ベクトル $\boldsymbol{k}$ と平面 Π の任意の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とについて，

$$L\perp\Pi \iff \boldsymbol{k} /\!/ \boldsymbol{n} \quad .$$

例題　xyz 座標空間において，連立方程式 $\frac{x-5}{2}=-\frac{y-7}{3}=\frac{z+8}{6}$ が表す直線 L に垂直で点 $(-9,-1,4)$ が属す平面 Π を表す方程式を求める．

〔解説〕 定理4.5.3より，連立方程式 $\frac{x-5}{2}=-\frac{y-7}{3}=\frac{z+8}{6}$ が表す直線 L の方向ベクトルの一つは $(2,-3,6)$ である．直線 L と平面 Π とが垂直なので，定理4.7.7より，L の方向ベクトル $(2,-3,6)$ と Π の法線ベクトルとは平行である．定理4.7.3より，$(2,-3,6)$ は Π の法線ベクトルである．定理4.7.4より，ある定数 d に対して，Π は方程式 $2x-3y+6z=d$ で表される．点 $(-9,-1,4)$ が Π に属すので，$d=2\cdot(-9)-3\cdot(-1)+6\cdot4=9$ ．Π は方程式 $2x-3y+6z=9$ で表される．　終

問題 4.7.4　xyz 座標空間において，連立方程式 $\frac{x+8}{6}=-\frac{y+2}{3}=-\frac{z-5}{4}$ が表す直線に垂直で点 $(7,-1,9)$ が属す平面 Π を表す方程式を求めなさい．

例題　xyz 座標空間において，方程式 $2x-3y+4z=7$ が表す平面 Π に垂直で点 $(5,6,-7)$ が属す直線 L を表す連立方程式を求める．

〔解説〕 定理4.7.5より，方程式 $2x-3y+4z=7$ が表す平面 Π の法線ベクトルの一つは $(2,-3,4)$ である．平面 Π と直線 Π とが垂直なので，定理4.7.7より，Π の法線ベクトル $(2,-3,4)$ は L の方向ベクトルと平行である．定理4.1.2より，ベクトル $(2,-3,4)$ は L の方向ベクトルである．点 $(5,6,-7)$ が L に属すので，定理4.5.2より，直線 L は連立方程式 $\frac{x-5}{2}=-\frac{y-6}{3}=\frac{z+7}{4}$ で表される．　終

問題 4.7.5　xyz 座標空間において，方程式 $6x-4y-3z=5$ が表す平面 Π に垂直で点 $(-7,9,-8)$ が属す直線 L を表す連立方程式を求めなさい．

例題　xyz 座標空間において，方程式 $5x-2y-z=17$ が表す平面 Π に点 $\mathrm{A}=(-4,8,7)$ から下ろした垂線の足 H を求める．

〔解説〕 平面 Π と直線 AH とが垂直なので，定理4.7.7より，平面 Π の法線ベクトルの一つ $(5,-2,-1)$ と直線 AH の方向ベクトルとは平行である．定理4.1.2より，$(5,-2,-1)$ は直線 AH の方向ベクトルである．定理4.1.6より，原点 O に対して，ある実数 t をとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(5,-2,-1)=(-4,8,7)+(5t,-2t,-t)=(5t-4,-2t+8,-t+7)\ ,$$

よって $\mathrm{H}=(5t-4,-2t+8,-t+7)$ ．この点 H が方程式 $5x-2y-z=17$ が表す平面 Π に属すので，

$$5(5t-4)-2(-2t+8)-(-t+7)=17\ ,$$
$$30t-43=17\ ,$$

よって $t=2$ ．故に $\mathrm{H}=(5t-4,-2t+8,-t+7)=(6,4,5)$ ．　終

問題 4.7.6　xyz 座標空間において，方程式 $x-3y-5z=-12$ が表す平面 Π に点 $\mathrm{A}=(7,-2,-9)$ から下ろした垂線の足 H を求めなさい．

[1] 3次元実ベクトルを含む計算は平面ベクトルだけの計算より大分面倒になることがあります．そこで本書では3次元実ベクトルに関する定理の証明の多くは省きます．