§4.6　3次元座標空間における直線

3次元座標空間における直線は連立方程式で表すことができます.

定理 4.6.1　定数 a,b,c について $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ かつ $c\neq 0$ とする. 定数 x_0,y_0,z_0 に対して, xyz 座標空間においてベクトル (a,b,c) を方向ベクトルとして点 (x_0,y_0,z_0) が属す直線は連立方程式 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ で表される.

証明　ベクトル (a,b,c) が直線 L の方向ベクトルであり, $(x_0,y_0,z_0)\in L$ とする. 原点を O とおく. 定理 4.1.6 より, xyz 座標空間の各点 P について,

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)\ .$$

$\mathrm{P}=(x,y,z)$ とおく.

$$(x,y,z)\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)\ .$$

ここで

$$\begin{aligned}
&(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)\\
\iff& x=x_0+at \text{ かつ } y=y_0+bt \text{ かつ } z=z_0+ct\\
\iff& t=\frac{x-x_0}{a} \text{ かつ } t=\frac{y-y_0}{b} \text{ かつ } t=z-z_0c\\
\iff& \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t\quad .
\end{aligned}$$

よって

$$(x,y,z)\in L \iff \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\ .$$

故に直線 L は連立方程式 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ で表される.　（証明終り）

定理 4.6.2　定数 a,b,c について $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ かつ $c\neq 0$ とする. 定数 x_0,y_0,z_0 に対して, xyz 座標空間において連立方程式 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ が表す図形はベクトル (a,b,c) を方向ベクトルとして点 (x_0,y_0,z_0) が属す直線である.

証明　定数 a,b,c について $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ かつ $c\neq 0$ とする. 定数 x_0,y_0,z_0 に対して, xyz 座標空間において連立方程式 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ が表す図形を F とおく. 実数 x,y,z を成分とする点 (x,y,z) について,

$$(x,y,z)\in F \iff \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\ .$$

更に,

$$\begin{aligned}
&\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\\
\iff& \text{ある実数 } t \text{ をとると } \frac{x-x_0}{a}=t \text{ かつ } \frac{y-y_0}{b}=t \text{ かつ } \frac{z-z_0}{c}=t\\
\iff& \text{ある実数 } t \text{ をとると } x=at+x_0 \text{ かつ } y=bt+y_0 \text{ かつ } z=ct+z_0\\
\iff& \text{ある実数 } t \text{ をとると } (x,y,z)=(x_0+at,y_0+bt,z_0+ct)\\
\iff& \text{ある実数 } t \text{ をとると } (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)\quad .
\end{aligned}$$

よって

$$(x,y,z)\in F \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)\ .$$

原点を O とおく. 座標空間の各点 $\mathrm{P}=(x,y,z)$ について, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,y,z)$ なので,

$$\mathrm{P}\in F \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)\quad .$$

F はベクトル (a,b,c) を方向ベクトルとする直線である.　（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において2点 $(4,2,5)$ と $(7,8,-4)$ とが属す直線 L を表す x,y,z に関する連立方程式を求める.

2点 $(4,2,5)$ と $(7,8,-4)$ とが属す直線 L の方向ベクトルの一つは

$$(4,2,5)-(7,8,-4)=(-3,-6,9)\ .$$

このベクトルと平行なベクトル $(1,2,-3)$ は L の方向ベクトルである. 直線 L は x,y,z に関する連立方程式 $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{-3}$ つまり $x-4=\dfrac{y-2}{2}=-\dfrac{z-5}{3}$ で表される.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.6.1}}$　xyz 座標空間において2点 $(-2,7,1)$ と $(-8,5,9)$ とが属す直線 L を表す x,y,z に関する連立方程式を求めなさい.

定理 4.6.3　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, 直線 L_1 の任意の方向ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ と直線 L_2 の任意の方向ベクトル $\boldsymbol{k}_2$ とについて,

$$L_1 \mathbin{/\!/} L_2 \iff \boldsymbol{k}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}_2\quad ,$$
$$L_1 \perp L_2 \iff \boldsymbol{k}_1 \perp \boldsymbol{k}_2\quad .$$

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x と y とについて次の条件をできるだけ簡単にする：3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(1,3,4)$ と $\mathrm{B}=(x,2,6)$ と $\mathrm{C}=(5,y,8)$ と $\mathrm{D}=(6,7,y)$ とに対して, 直線 AB と直線 CD とが平行である.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x,2,6)-(1,3,4)=(x-1,-1,2)\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(7,8,y)-(5,y,9)=(2,8-y,y-9)\ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\mathbf{0}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は直線 AB の方向ベクトルである. $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\neq\mathbf{0}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は直線 CD の方向ベクトルである. 直線 AB と直線 CD とが平行である条件は,

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ,$$
$$(2,8-y,y-9) \mathbin{/\!/} (x-1,-1,2)\ ,$$

$(x-1,-1,2)\neq\mathbf{0}$ なので,

$$\text{ある実数 } k \text{ をとると } (2,8-y,y-9)=k(x-1,-1,2)\ .$$

$-k=8-y$ かつ $2k=y-9$ なので, $k=-1$ かつ $y=7$. $2=k(x-1)$ なので $x=-1$. 故に, 直線 AB と直線 CD とが平行である条件は, $x=-1$ かつ $y=7$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.6.2}}$　変数 x と y とについて次の条件をできるだけ簡単にする：3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(1,2,5)$ と $\mathrm{B}=(3,y,9)$ と $\mathrm{C}=(x,6,7)$ と $\mathrm{D}=(4,8,x)$ とに対して, 直線 AB と直線 CD とが平行である.

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について次の条件をできるだけ簡単にする：3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(1,3,2)$ と $\mathrm{B}=(x,4,5)$ と $\mathrm{C}=(7,x,6)$ と $\mathrm{D}=(9,8,x)$ とに対して, 直線 AB と直線 CD とが垂直である.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x,4,5)-(1,3,2)=(x-1,1,3)\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(9,8,x)-(7,x,6)=(2,8-x,x-6)\ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\mathbf{0}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は直線 AB の方向ベクトルである. $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\neq\mathbf{0}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は直線 CD の方向ベクトルである. 直線 AB と直線 CD とが垂直である条件は,

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}\ ,\\
(x-1,1,3)\perp(2,8-x,x-6)\ ,\\
(x-1,1,3)\cdot(2,8-x,x-6)=0\ .\\
2(x-1)+(8-x)+3(x-6)=0\ ,\\
4x-12=0\ ,
\end{gathered}$$

よって $x=3$. 故に, 直線 AB と直線 CD とが垂直である条件は $x=3$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.6.3}}$　変数 x について次の条件をできるだけ簡単にする：3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(3,2,1)$ と $\mathrm{B}=(x,4,5)$ と $\mathrm{C}=(6,x,7)$ と $\mathrm{D}=(8,9,x)$ とに対して, 直線 AB と直線 CD とが垂直である.

$\boxed{\text{例題}}$　3次元座標空間において, ベクトル $(1,2,3)$ を方向ベクトルとする直線 L に点 $\mathrm{A}=(5,4,7)$ が属すとする. 点 $\mathrm{B}=(2,3,4)$ から直線 L に下した垂線の足 H を求める.

〔解説〕 $(1,2,3)$ が方向ベクトルであり点 A が属す直線 L に点 H は属すので, 定理 4.1.6 より, ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t(1,2,3)=(5,4,7)-(2,3,4)+(t,2t,3t)=(t+3,2t+1,3t+3)\ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(t+3,2t+1,3t+3)\neq\mathbf{0}$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ は直線 BH の方向ベクトルである. 直線 BH と直線 L とは垂直なので,

$$\begin{gathered}
(1,2,3)\perp\overrightarrow{\mathrm{BH}}\ ,\\
(1,2,3)\perp(t+3,2t+1,3t+3)\ ,\\
(1,2,3)\cdot(t+3,2t+1,3t+3)=0\ ,\\
t+3+4t+2+9t+9=0\ ,\\
14t+14=0\ ,
\end{gathered}$$

よって $t=-1$. $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(t+3,2t+1,3t+3)=(2,-1,0)$ なので, 原点 O に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(2,3,4)+(2,-1,0)=(4,2,4)\ .$$

故に $\mathrm{H}=(4,2,4)$.

〔別解〕 点 B から直線 L に下した垂線の足 H は, L に属す各点 P のうち点 B との距離 $\overline{\mathrm{BP}}$ が最小になる点である. $(1,2,3)$ が方向ベクトルであり点 A が属す直線 L に属す各点 P について, 定理 4.1.6 より, ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t(1,2,3)=(5,4,7)-(2,3,4)+(t,2t,3t)=(t+3,2t+1,3t+3)\ ,$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{BP}}^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=(t+3)^2+(2t+1)^2+(3t+3)^2\\
&=t^2+6t+9+4t^2+4t+1+9t^2+18t+9=14t^2+28t+19\\
&=14(t^2+2t)+19=14(t^2+2t+1)-14+19\\
&=14(t+1)^2+5\ .
\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{BP}}^2$ の値が最小になるのは $t=-1$ のときである. このとき, $\mathrm{P}=\mathrm{H}$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t+3,2t+1,3t+3)=(2,-1,0)\ ;$$

原点 O に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(2,3,4)+(2,-1,0)=(4,2,4)\ .$$

故に $\mathrm{H}=(4,2,4)$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.6.4}}$　3次元座標空間において, 直線 L の方向ベクトルの一つが $(3,2,1)$ であり点 $\mathrm{A}=(9,8,8)$ が L に属すとする. 点 $\mathrm{B}=(5,3,2)$ から直線 L に下した垂線の足 H を求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(3,6,7)$ と $\mathrm{B}=(5,8,9)$ と $\mathrm{C}=(1,2,4)$ とについて, 点 C から直線 AB に下した垂線の足 H を求める.

〔解説〕

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(3,6,8)-(1,2,4)=(2,4,4)\ ,\qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}}=(5,7,9)-(1,2,4)=(4,5,5)\ .$$

点 H は直線 AB に属すので, 定理 4.1.7 より, ある実数 t をとると,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=t\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}}=t(2,4,4)+(1-t)(4,5,5)\\
&=\bigl(2t+4(1-t),4t+5(1-t),4t+5(1-t)\bigr)\\
&=(-2t+4,-t+5,-t+5)\ .
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-2t+4,-t+5,-t+5)\neq\mathbf{0}$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は直線 CH の方向ベクトルである. また, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,7,9)-(3,6,8)=(2,1,1)$ は直線 AB の方向ベクトルである. 直線 AB と直線 CH とは垂直なので, 定理 4.4 より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$, よって,

$$\begin{gathered}
(2,1,1)\cdot(-2t+4,-t+5,-t+5)=0\ ,\\
-4t+8-t+5-t+5=0\ ,\\
-6t+18=0\ ,
\end{gathered}$$

よって $t=3$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-2t+4,-t+5,-t+5)=(-2,2,2)$. 原点 O に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(1,2,4)+(-2,2,2)=(-1,4,6)\ .$$

故に $\mathrm{H}=(-1,4,6)$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.6.5}}$　3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(1,2,3)$ と $\mathrm{B}=(4,7,8)$ と $\mathrm{C}=(5,6,9)$ とについて, 点 A から直線 BC に下した垂線の足 H を求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において連立方程式 $x-4=\dfrac{y-7}{2}=-\dfrac{z+6}{5}$ が表す直線 L_1 と連立方程式 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+9}{4}=-\dfrac{z-5}{8}$ が表す直線 L_2 との両方に垂直であり点 $(-2,-3,8)$ が属す直線 L_3 を表す方程式を求める.

〔解説〕 定数 a,b,c について, ベクトル (a,b,c) が直線 L_3 の方向ベクトルであるとする. 定理 4.6.3 より, 連立方程式 $x-4=\dfrac{y-7}{2}=-\dfrac{z+6}{5}$ が表す直線 L_1 の方向ベクトルの一つは $(1,2,-5)$ である. 定理 4.6.3 より, 連立方程式 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+9}{4}=-\dfrac{z-5}{8}$ が表す直線 L_2 の方向ベクトルの一つは $(3,4,-8)$ である. 直線 L_1 と直線 L_3 とは垂直なので, 定理 4.6.1 より, 直線 L_1 の方向ベクトル $(1,2,-5)$ と直線 L_3 の方向ベクトル (a,b,c) とは垂直である. よって, $(1,2,-5)\cdot(a,b,c)=0$, $a+2b-5c=0$. 直線 L_2 と直線 L_3 とは垂直なので, 定理 4.6.1 より, 直線 L_2 の方向ベクトル $(3,4,-8)$ と直線 L_3 の方向ベクトル (a,b,c) とは垂直である. よって, $(3,4,-8)\cdot(a,b,c)=0$, $3a+4b-8c=0$. $a+2b-5c=0$ より $2a+4b-10c=0$, これと $3a+4b-8c=0$ より, $a+2c=0$, $a=-2c$. $a+2b-5c=0$ より $2b=5c-a=5c+2c=7c$, $b=\dfrac{7}{2}c$. $c=2$ とすると, $a=-4$ かつ $b=7$. L_3 の方向ベクトルの一つは $(-4,7,2)$ である. 点 $(-2,-3,8)$ が直線 L_3 に属すので, 直線 L_3 は方程式 $-\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+3}{7}=\dfrac{z-8}{2}$ で表される.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.6.6}}$　xyz 座標空間において連立方程式 $x+5=\dfrac{y-5}{2}=-\dfrac{z-3}{4}$ が表す直線 L_1 と連立方程式 $\dfrac{x+4}{3}=y-2=-\dfrac{z-6}{5}$ が表す直線 L_2 との両方に垂直であり点 $(7,-8,9)$ が属す直線 L_3 を表す直線を求めなさい.