§4.5　座標平面における直線の傾き

xy 座標平面における直線 L に属す点 (x_1,y_1) と (x_2,y_2) と（ x_1,x_2,y_1,y_2 は実数）に対して，$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ の値を L の傾きといいます．直線 L が x 軸と垂直でないとき L の傾きは唯一つに定まります．直線 L が x 軸と垂直であるとき L の傾きはありません．

定理　xy 座標平面において x 軸と垂直でない直線 L の傾きが a であるとき，L の方向ベクトルの一つは $(1,a)$ であり，ある定数 b をとると，L は方程式 $y=ax+b$ で表される．

証明　x 軸と垂直でない直線 L の傾きが a であるとする．直線 L に属す点 (x_1,y_1) と (x_2,y_2) と（ x_1,x_2,y_1,y_2 は実数）について，$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a$ ，$y_2-y_1=a(x_2-x_1)$ なので，L の方向ベクトルの一つは

$$(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1)=\big(x_2-x_1,a(x_2-x_1)\big)=(x_2-x_1)(1,a)\ ;$$

$x_2-x_1\neq 0$ なので，$(1,a)$ は L の方向ベクトルである．ある定数 b をとると，L は方程式 $ax-y=-b$ つまり $y=ax+b$ で表される．（証明終り）

定理　定数 a と b とについて，xy 座標平面において方程式 $y=ax+b$ が表す図形は傾きが a である直線である．

証明　定数 a と b とについて，定理 4.3.4 より，方程式 $y=ax+b$ つまり $ax-y=b$ が表す図形 F は直線でありその方向ベクトルの一つは $(1,a)$ である．直線 L に属す点 (x_1,y_1) と (x_2,y_2) と（ x_1,x_2,y_1,y_2 は実数）について，ベクトル $(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ は L の法線ベクトルなので，ある実数 k をとると，$(x_2-x_1,y_2-y_1)=k(1,a)$ ，$x_2-x_1=k$ かつ $y_2-y_1=ak$ ，$y_2-y_1=a(x_2-x_1)$ ，よって $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a$ ．直線 L の傾きは a である．（証明終り）

xy 座標平面において x に垂直でない直線 L_1 と L_2 とについて，L_1 の傾きを a_1 とおき，L_2 の傾きを a_2 とおきます．L_1 の方向ベクトルの一つは $(1,a_1)$ で，L_2 の方向ベクトルの一つは $(1,a_2)$ です．

$$L_1 \mathbin{/\!/} L_2 \iff (1,a_1) \mathbin{/\!/} (1,a_2) \iff 1\cdot a_2=1\cdot a_1 \iff a_1=a_2\ .$$

$$L_1 \perp L_2 \iff (1,a_1)\perp(1,a_2) \iff 1+a_1a_2=0 \iff a_1a_2=-1\ .$$

定理　xy 座標平面において x に垂直でない直線 L_1 と L_2 とについて，L_1 の傾きを a_1 とおき L_2 の傾きを a_2 とおくと，

$$L_1 \mathbin{/\!/} L_2 \iff a_1=a_2\ ,$$
$$L_1\perp L_2 \iff a_1a_2=-1\ .$$