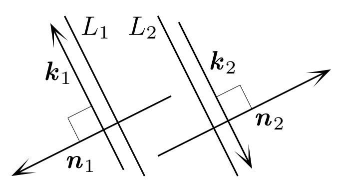
§4.4　座標平面における2直線の平行と垂直

座標平面 $\mathbf{R}^2$ における直線 L_1 と L_2 とが平行であるとは，L_1 のある方向ベクトルと L_2 のある方向ベクトルとが平行であることです；このことを $L_1 \mathbin{/\!/} L_2$ と表記します． 座標平面における直線 L_1 と L_2 とが垂直であるとは，L_1 のある方向ベクトルと L_2 のある方向ベクトルとが垂直であることです；このことを $L_1 \perp L_2$ と表記します．

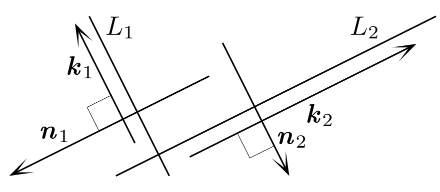
つぎの定理の証明は略します．

定理 4.4　座標平面 $\mathbf{R}^2$ における直線 L_1 の任意の方向ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ 及び L_1 の任意の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ と，直線 L_2 の任意の方向ベクトル $\boldsymbol{k}_2$ 及び L_2 の任意の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_2$ とについて，

$$\begin{aligned} L_1 \mathbin{/\!/} L_2 &\iff \boldsymbol{k}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}_2 \\ &\iff \boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \\ &\iff \boldsymbol{k}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \\ &\iff \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{k}_2 \quad , \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} L_1 \perp L_2 &\iff \boldsymbol{k}_1 \perp \boldsymbol{k}_2 \\ &\iff \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \\ &\iff \boldsymbol{k}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \\ &\iff \boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}_2 \quad . \end{aligned}$$



座標平面 $\mathbf{R}^2$ の相異なる点 A と B とに対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は零ベクトルではないので，点 A が属し $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線が唯一つ定まります：この直線が直線 AB です．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について次の条件をなるべく簡単にする：座標平面の点 $\mathrm{A}=(5,2)$ と $\mathrm{B}=(x,8)$ と $\mathrm{C}=(3,x)$ と $\mathrm{D}=(x,4)$ とに対して，直線 AB と直線 CD とは平行である．

〔解説〕 直線 AB と直線 CD とが平行である条件は，$x \neq 5$ かつ $x \neq 3$ のとき，直線 AB の傾き $\dfrac{8-2}{x-5}$ と直線 CD の傾き $\dfrac{4-x}{x-3}$ について $\dfrac{8-2}{x-5}=\dfrac{4-x}{x-3}$ となることである；しかし，このように考えると，$x=5$ のとき及び $x=3$ のときはどうなるか別途考えなければならない． できればこのように場合分けをせずに済ませたい．

$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ ．　$\mathrm{C}=\mathrm{D}$ とすると，$(3,x)=(x,4)$ なので，$x=3$ かつ $x=4$ ；これは矛盾なので $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$ ． 定理 4.1.4 より，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x,8)-(5,2) = (x-5,6) \neq \mathbf{0}$$

は直線 AB の方向ベクトルであり，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (x,4)-(3,x) = (x-3,4-x) \neq \mathbf{0}$$

は直線 CD の方向ベクトルである． 定理 4.4 より，

$$\mathrm{AB} \mathbin{/\!/} \mathrm{CD} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{CD}} \iff (x-5,6) \mathbin{/\!/} (x-3,4-x) \quad ,$$

定理 3.5.5 より

$$\begin{aligned} (x-5,6) \mathbin{/\!/} (x-3,4-x) &\iff (x-5)(4-x)=6(x-3) \iff x^2-3x+2=0 \\ &\iff x=1 \text{ または } x=2 \quad . \end{aligned}$$

直線 AB と直線 CD とが平行である条件は，$x=1$ または $x=2$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.1}}$　変数 x について次の条件をなるべく簡単にしなさい：座標平面の点 $\mathrm{A}=(3,4)$ と $\mathrm{B}=(x,9)$ と $\mathrm{C}=(6,x)$ と $\mathrm{D}=(2x,8)$ とについて，直線 AB と直線 CD とが平行である．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について次の条件をなるべく簡単にする：座標平面の点 $\mathrm{A}=(2,3)$ と $\mathrm{B}=(x,7)$ と $\mathrm{C}=(5,x)$ と $\mathrm{D}=(x,2)$ とに対して，直線 AB と直線 CD とが垂直である．

〔解説〕 $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ ．　$\mathrm{C}=\mathrm{D}$ とすると，$(5,x)=(x,2)$ なので，$x=5$ かつ $x=2$ ；これは矛盾なので $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$ ． 定理 4.1.4 より，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x,7)-(2,3) = (x-2,4) \neq \mathbf{0}$$

は直線 AB の方向ベクトルであり，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (x,2)-(5,x) = (x-5,2-x) \neq \mathbf{0}$$

は直線 CD の方向ベクトルである． 定理 4.4 より，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} \perp \mathrm{CD} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}} \iff (x-2,4) \perp (x-5,2-x) \\ &\iff (x-2)(x-5)+4(2-x)=0 \iff (x-2)(x-9)=0 \\ &\iff x=2 \text{ または } x=9 \quad . \end{aligned}$$

直線 AB と直線 CD とが垂直である条件は，$x=2$ または $x=9$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.2}}$　変数 x について次の条件をなるべく簡単にしなさい：座標平面の点 $\mathrm{A}=(5,3)$ と $\mathrm{B}=(9,x)$ と $\mathrm{C}=(2x,1)$ と $\mathrm{D}=(6,x)$ とについて，直線 AB と直線 CD とが垂直である．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 k について次の条件をなるべく簡単にする：xy 座標平面において方程式 $3x+ky=7$ が表す直線 L_1 と方程式 $5x+k^2y=9$ が表す直線 L_2 とが平行である．

〔解説〕 $k \neq 0$ のとき，L_1 と L_2 とが平行である条件は，L_1 の傾き $-\dfrac{3}{k}$ と L_2 の傾き $-\dfrac{5}{k^2}$ とが等しくなればよい；しかし，このように考えると，$k=0$ のときはどうなるのか別途考えなければならない． できればこのように場合わけをせずに済ませたい．

定理 4.3.4 より，ベクトル $(3,k)$ は L_1 の法線ベクトルであり，ベクトル $(5,k^2)$ は L_2 の法線ベクトルである． 定理 4.4 より，

$$L_1 \mathbin{/\!/} L_2 \iff (3,k) \mathbin{/\!/} (5,k^2) \quad .$$

定理 3.5.5 より，

$$\begin{aligned} (3,k) \mathbin{/\!/} (5,k^2) &\iff 3k^2=5k \iff k(3k-5)=0 \\ &\iff k=0 \text{ または } k=\frac{5}{3} \quad . \end{aligned}$$

直線 L_1 と直線 L_2 とが平行である条件は，$k=0$ または $k=\dfrac{5}{3}$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.3}}$　変数 k について次の条件をなるべく簡単にしなさい：xy 座標平面において方程式 $7x-ky=5$ が表す直線 L_1 と方程式 $3x+k^2y=9$ が表す直線 L_2 とが平行である．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 k について次の条件をなるべく簡単にする：xy 座標平面において方程式 $3x+ky=4$ が表す直線 L_1 と方程式 $k^2x+5y=9$ が表す直線 L_2 とが垂直である．

定理 4.3.4 より，ベクトル $(3,k)$ は L_1 の法線ベクトルであり，ベクトル $(k^2,5)$ は L_2 の法線ベクトルである． 定理 4.4 より，

$$\begin{aligned} L_1 \perp L_2 &\iff (3,k) \perp (k^2,5) \iff 3k^2+5k=0 \iff k(3k+5)=0 \\ &\iff k=0 \text{ または } k=-\frac{5}{3} \quad . \end{aligned}$$

直線 L_1 と直線 L_2 とが垂直である条件は，$k=0$ または $k=-\dfrac{5}{3}$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.4}}$　変数 k について次の条件をなるべく簡単にする：xy 座標平面において方程式 $kx-5y=3$ が表す直線 L_1 と方程式 $7x+k^2y=8$ が表す直線 L_2 とが垂直である．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において方程式 $2x+3y=7$ が表す直線と平行で点 $(4,5)$ が属す直線 L を表す方程式を求める．

〔解説〕 定理 4.4 より，方程式 $2x+3y=7$ が表す直線の法線ベクトル $(2,3)$ と直線 L の法線ベクトルとは平行である． 定理 4.2.4 より，ベクトル $(2,3)$ は L の法線ベクトルである． 定理 4.3.2 より，ある定数 c をとると，L は方程式 $2x+3y=c$ で表される． この直線に点 $(4,5)$ が属すので，$2\cdot 4+3\cdot 5=c$ ，$c=23$ ． 故に直線 L は方程式 $2x+3y=23$ で表される． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.5}}$　xy 座標平面において方程式 $5x-4y=1$ が表す直線と平行で点 $(3,2)$ が属す直線 L を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において方程式 $2x+3y=5$ が表す直線と垂直で点 $(6,7)$ が属す直線 L を表す方程式を求める．

〔解説〕 定理 4.4 より，方程式 $2x+3y=5$ が表す直線の法線ベクトル $(2,3)$ と直線 L の方向ベクトルとは平行である． 定理 4.1.2 より，ベクトル $(2,3)$ は L の方向ベクトルである． 定理 4.3.3 より，ある定数 c をとると，L は方程式 $3x-2y=c$ で表される． この直線に点 $(6,7)$ が属すので，$3\cdot 6-2\cdot 7=c$ ，$c=4$ ． 故に直線 L は方程式 $3x-2y=4$ で表される． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.6}}$　xy 座標平面において方程式 $5x-6y=3$ が表す直線と垂直で点 $(3,-2)$ が属す直線 L を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において点 $\mathrm{P}=(2,-6)$ から方程式 $3x+2y=7$ が表す直線 L に下ろした垂線の足 H を求める．

〔解説〕 実数 x, y に対して $\mathrm{H}=(x,y)$ とおく． $\mathrm{H}=(x,y)$ が直線 L に属すので $3x+2y=7$ ． 方程式 $3x+2y=7$ が表す直線 L の一つの方向ベクトルは $(2,-3)$ である． 直線 PH と直線 L とが垂直なので，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(x,y)-(2,-6)=(x-2,y+6)$ とベクトル $(2,-3)$ とは垂直である． よって，$(x-2,y+6)\cdot(2,-3)=0$ ，$2(x-2)-3(y+6)=0$ ，$2x-3y=22$ ． $3x+2y=7$ かつ $2x-3y=22$ なので，$x=5$ かつ $y=-4$ ． 故に $\mathrm{H}=(5,-4)$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.7}}$　xy 座標平面において点 $\mathrm{P}=(2,8)$ から方程式 $4x+5y=7$ が表す直線 L に下ろした垂線の足 H を求めなさい．

点から直線に下した垂線の足は次のような計算でも求めることができます．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において点 $\mathrm{A}=(2,9)$ から方程式 $3x+5y=17$ が表す直線 L に下ろした垂線の足 H を求める．

〔解説〕 A は L に属さないので $\mathrm{H} \neq \mathrm{P}$ ． 直線 L と直線 AH とは垂直なので，定理 4.4 より，直線 L の法線ベクトル $(3,5)$ と直線 AH の方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ とは平行である． よって定理 4.1.2 よりベクトル $(3,5)$ は直線 AH の方向ベクトルである． 原点を O とおく：$\mathrm{O}=(0,0)$ ． 定理 4.1.6 より，ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(3,5) = (2,9)+(3t,5t) = (2+3t,9+5t) \ ,$$

よって $\mathrm{H}=(3t+2,5t+9)$ ． H は方程式 $3x+5y=17$ が表す直線 L に属すので，$3(3t+2)+5(5t+9)=17$ ，$34t+51=17$ ，$34t=-34$ ，$t=-1$ ． 故に $\mathrm{H}=(3t+2,5t+9)=(-1,4)$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.8}}$　xy 座標平面において点 $\mathrm{P}=(1,-2)$ から方程式 $4x-3y=15$ が表す直線 L に下ろした垂線の足 H を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　座標平面の点 $\mathrm{A}=(1,2)$ と $\mathrm{B}=(3,8)$ と $\mathrm{C}=(6,5)$ とについて，A から直線 BC に下ろした垂線の足 H を求める．

〔解説〕

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,8)-(1,2) = (2,6) \ , \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (6,5)-(1,2) = (5,3) \ .$$

点 H は直線 BC に属すので，定理 4.1.7 より，ある実数 t をとると，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AH}} &= t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} = t(2,6)+(1-t)(5,3) = \bigl(2t+5(1-t),6t+3(1-t)\bigr) \\ &= (-3t+5,3t+3) \ . \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-3t+5,3t+3) \neq \mathbf{0}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は直線 AH の方向ベクトルである． また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(6,5)-(3,8)=(3,-3)$ は直線 BC の方向ベクトルなので，ベクトル $(1,-1)$ は直線 BC の方向ベクトルである． 直線 BC と直線 AH とは垂直なので，定理 4.4 より $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ ，よって，

$$(1,-1)\cdot(-3t+5,3t+3)=0 \ ,$$
$$-3t+5-(3t+3)=0 \ ,$$
$$-6t+2=0 \ ,$$

よって $t=\dfrac{1}{3}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-3t+5,3t+3)=(4,4)$ ． 原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}} = (1,2)+(4,4) = (5,6) \ .$$

故に $\mathrm{H}=(5,6)$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.9}}$　座標平面の点 $\mathrm{A}=(1,4)$ と $\mathrm{B}=(-1,6)$ と $\mathrm{C}=(-2,2)$ とについて，C から直線 AB に下ろした垂線の足 H を求めなさい．