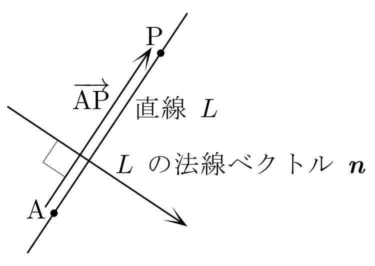
§4.3　座標平面における直線を表す方程式

定理 4.3.1　座標平面において，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{n}$ が直線 L の法線ベクトルであり点 A が L に属すならば，各点 P について，

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n}$$
$$\iff \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0 \quad .$$



証明　点 A が直線 L に属すとする．L の方向ベクトルの一つを $\boldsymbol{k}$ とおく．定理 4.1.1 より，各点 P について，

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \,/\!/\, \boldsymbol{k} \quad .$$

零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{n}$ は直線 L の法線ベクトルであるとする．定理 3.2.3 より $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{n}$ なので，定理 2.6.3 より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \,/\!/\, \boldsymbol{k}$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n}$ ，定理 2.6.2 より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n}$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \,/\!/\, \boldsymbol{k}$ ．よって

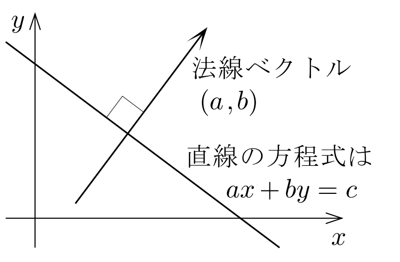
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \,/\!/\, \boldsymbol{k} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \quad .$$

故に，各点 P について，

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \iff \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0 \quad .$$

（証明終り）

定理 4.3.2　定数 a, b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．xy 座標平面において，ベクトル (a,b) が直線 L の法線ベクトルであるならば，ある定数 c をとると，L は方程式 $ax+by=c$ で表される．



証明　ベクトル (a,b) は直線 L の法線ベクトルであるとする．L に属す点 P_0 をとる．変数 x, y に対する点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について，定理 4.3.1 より，

$$(x,y) \in L \iff \mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \perp (a,b) \iff (a,b)\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = 0 \ .$$

$\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$（ x_0, y_0 は実数）とおく．$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = (x,y)-(x_0,y_0)$ なので，

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = 0 &\iff (a,b)\cdot\{(x,y)-(x_0,y_0)\} = 0\\ &\iff (a,b)\cdot(x,y)-(a,b)\cdot(x_0,y_0) = 0\\ &\iff (a,b)\cdot(x,y) = (a,b)\cdot(x_0,y_0)\\ &\iff ax+by = ax_0+bx_0 \quad .\end{aligned}$$

$c = ax_0+by_0$ とおく．

$$(x,y) \in L \iff ax+by = ax_0+bx_0 \iff ax+by = c \quad .$$

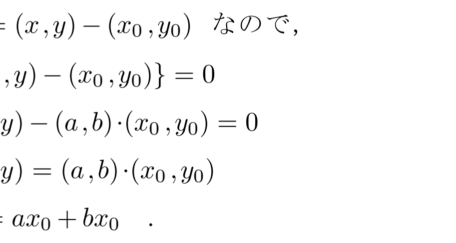
直線 L は方程式 $ax+by=c$ で表される．（証明終り）

例題　xy 座標平面における直線 L について，点 $(6,5)$ が L に属しベクトル $(-3,2)$ が L の法線ベクトルであるとする．L を表す方程式を求める．

ベクトル $(-3,2)$ が直線 L の法線ベクトルなので，定理 3.4.2 より，ある定数 c をとると，L は方程式 $-3x+2y=c$ で表される．点 $(6,5)$ が L に属すので，$-3\cdot6+2\cdot5=c$ ，$c=-8$ ．故に直線 L は方程式は $-3x+2y=-8$ つまり $3x-2y=8$ で表される．終

問題 4.3.1　xy 座標平面における直線 L について，点 $(3,2)$ が L に属しベクトル $(-5,4)$ が L の法線ベクトルであるとします．L を表す方程式を求めなさい．

定理 4.3.3　定数 a, b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．xy 座標平面において，ベクトル (a,b) が直線 L の方向ベクトルであるならば，ある定数 c をとると，L は方程式 $bx-ay=c$ で表される．



証明　ベクトル (a,b) は直線 L の方向ベクトルであるとする．L に属す点 P_0 をとる．変数 x, y に対して点 $\mathrm{P}=(x,y)$ を考える．定理 3.1.1 より，

$$(x,y) \in L \iff \mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \,/\!/\, (a,b) \quad .$$

$\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$（ x_0, y_0 は実数）とおく．$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = (x,y)-(x_0,y_0) = (x-x_0, y-y_0)$ ．
定理 2.6.1 により，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \,/\!/\, (a,b) &\iff (x-x_0, y-y_0) \,/\!/\, (a,b) \iff b(x-x_0) = a(y{-}_0)\\ &\iff bx-ay = bx_0-ay_0 \quad .\end{aligned}$$

$c = bx_0-ay_0$ とおく．

$$(x,y) \in L \iff bx-ay = bx_0-ay_0 \iff bx-ay = c \quad .$$

直線 L は方程式 $bx-ay=c$ で表される．（証明終り）

例題　xy 座標平面における直線 L について，点 $(4,7)$ が L に属しベクトル $(2,5)$ が L の方向ベクトルであるとする．L を表す方程式を求める．

ベクトル $(2,5)$ が直線 L の方向ベクトルなので，定理 4.3.3 より，ある定数 c をとると，L は方程式 $5x-2y=c$ で表される．点 $(4,7)$ が L に属すので，$5\cdot4-2\cdot7=c$ ，$c=6$ ．直線 L は方程式 $5x-2y=6$ で表される．終

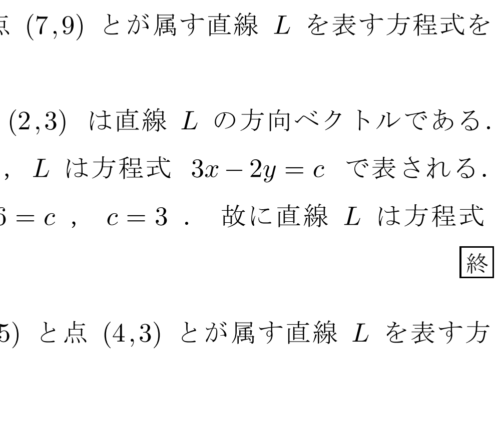
問題 4.3.2　xy 座標平面における直線 L について，点 $(5,6)$ が L に属しベクトル $(3,4)$ が L の方向ベクトルであるとします．L を表す方程式を求めなさい．

例題　xy 座標平面において，点 $(5,6)$ と点 $(7,9)$ とが属す直線 L を表す方程式を求める．

定理 3.1.2 より，ベクトル $(7,9)-(5,6)=(2,3)$ は直線 L の方向ベクトルである．従って定理 4.3.3 より，ある定数 c をとると，L は方程式 $3x-2y=c$ で表される．点 $(5,6)$ が直線 L に属すので，$3\cdot5-2\cdot6=c$ ，$c=3$ ．故に直線 L は方程式 $3x-2y=3$ で表される．終

問題 4.3.3　xy 座標平面において，点 $(1,5)$ と点 $(4,3)$ とが属す直線 L を表す方程式を求めなさい．

定理 4.3.4　a, b, c は定数で $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．xy 座標平面において，変数 x, y に関する方程式 $ax+by=c$ が表す図形 L は直線であり，ベクトル $(b,-a)$ は L の方向ベクトルであり，ベクトル (a,b) は L の法線ベクトルである．



証明　$a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので，$a^2+b^2>0$ ．$x_0 = \dfrac{ac}{a^2+b^2}$ ，$y_0 = \dfrac{bc}{a^2+b^2}$ とおく．このとき

$$ax_0+by_0 = a\frac{ac}{a^2+b^2}+b\frac{bc}{a^2+b^2} = \frac{a^2c+b^2c}{a^2+b^2} = \frac{c(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = c \ .$$

$\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ とおく．変数 x, y に対して点 $\mathrm{P}=(x,y)$ を考えると，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = (x,y)-(x_0,y_0) = (x-x_0, y-y_0)$ なので，定理 2.6.1 を用いると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \,/\!/\, (b,-a) &\iff (x-x_0, y-y_0) \,/\!/\, (b,-a)\\ &\iff -a(x-x_0) = b(y-y_0) \iff ax+by = ax_0+by_0\\ &\iff ax+by = c \quad .\end{aligned}$$

L は方程式 $ax+by=c$ で表されるので，

$$\mathrm{P} \in L \iff (x,y) \in L \iff ax+by = c \quad .$$

よって

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \,/\!/\, (b,-a) \quad .$$

従って，図形 L はベクトル $(b,-a)$ を方向ベクトルとする直線である．

$$(a,b)\cdot(b,-a) = ab+b(-a) = 0 \ ,$$

よってベクトル (a,b) は L の方向ベクトル $(b,-a)$ と垂直なので，(a,b) は L の法線ベクトルである．（証明終り）

例　xy 座標平面において方程式 $4x-6y=5$ が表す直線 L の方向ベクトルの一つは，定理 4.3.4 より，$(-6,-4)$ である．このベクトルに平行なベクトル $(3,2)$ はやはり L の方向ベクトルである．L の方向ベクトルの一つは $(3,2)$ である．終

問題 4.3.4　xy 座標平面において方程式 $8x-6y=7$ が表す直線 L の方向ベクトルを求めなさい．

例　xy 座標平面において方程式 $9x-6y=9$ が表す直線 L の法線ベクトルの一つは，定理 4.3.4 より，$(9,-6)$ である．このベクトルに平行なベクトル $(3,-2)$ はやはり L の法線ベクトルである．L の方向ベクトルの一つは $(3,-2)$ である．終

問題 4.3.5　xy 座標平面において方程式 $6x-4y=5$ が表す直線 L の法線ベクトルを求めなさい．

例題　xy 座標平面において，平面ベクトル $(7,8)$ を方向ベクトルとし点 $\mathrm{A}=(6,1)$ が属す直線と，方程式 $2x-3y=15$ が表す直線との共有点 P を求める．
〔解説〕 原点を O とおく：$\mathrm{O}=(0,0)$ ．ベクトル $(7,8)$ を方向ベクトルとし点 $\mathrm{A}=(6,1)$ が属す直線に点 P が属すので，定理 4.1.6 より，ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(7,8) = (6,1)+(7t,8t) = (6+7t, 1+8t) \ ,$$

よって $\mathrm{P}=(7t+6, 8t+1)$ ．P は方程式 $2x-3y=15$ が表す直線に属すので，$2(7t+6)-3(8t+1)=15$ ，$-10t+9=15$ ，$t=-\dfrac{3}{5}$ ．従って

$$\mathrm{P} = (7t+6, 8t+1) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{19}{5}\right) \ .$$

終

問題 4.3.6　xy 座標平面において，平面ベクトル $(-5,2)$ を方向ベクトルとして点 $(-4,-2)$ が属す直線と，方程式 $4x+3y=13$ が表す直線との共有点 P を求めなさい．