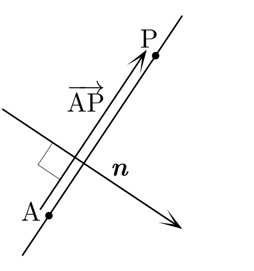
§4.2　座標平面における直線の法線ベクトル



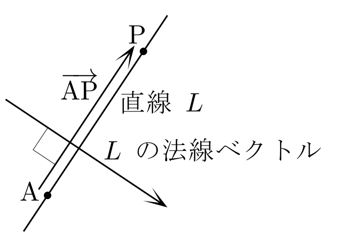
前節では，座標空間において，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{k}$ と定点 A とに対して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}$ となる点 P の全体は直線であることを述べました． 座標平面 $\mathbf{R}^2$ では，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{n}$ と定点 A とに対して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n}$ となる点 P の全体も直線になります． その証明は後にします．

定理 4.2.1　実数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする． 座標平面において，ある点 A に対して $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp (a,b)$ となる点 P の全体は，ベクトル $(b,-a)$ を方向ベクトルとする直線である．

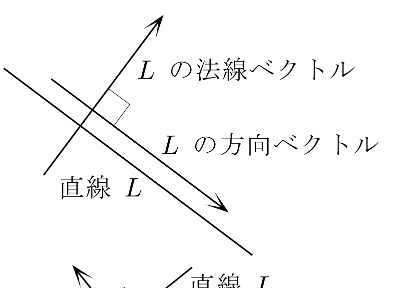
零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{n}$ が直線 L の**法線ベクトル**であるとは，$\boldsymbol{n}$ と L とが垂直であることです． 正確には次のように定義します．

定義　座標平面において，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{n}$ が直線 L の法線ベクトルであるとは次の条件が成り立つことである：ある点 A をとると，各点 P について

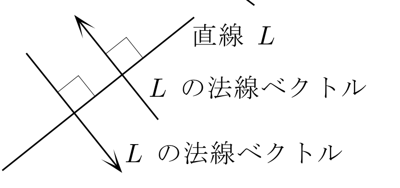
$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \quad .$$



座標平面において，直線の方向ベクトルと法線ベクトルとについて以下の定理が成り立ちます． それらの証明は後にします．



定理 4.2.2　座標平面において，直線 L の任意の方向ベクトルと L の任意の法線ベクトルとは垂直である．



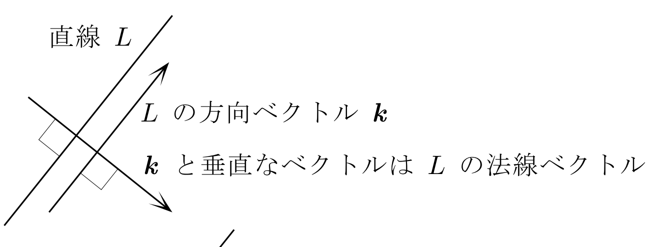
定理 4.2.3　座標平面において，一つの直線の任意の 2 個の法線ベクトルは平行である．

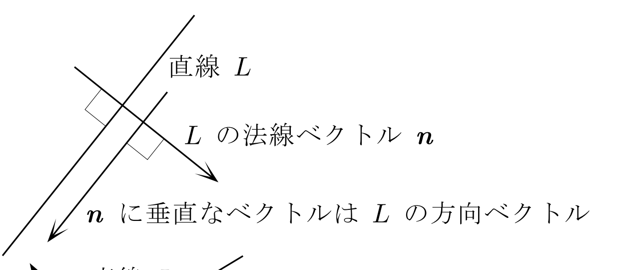
定理 4.2.4　座標平面において以下のことが成り立つ：

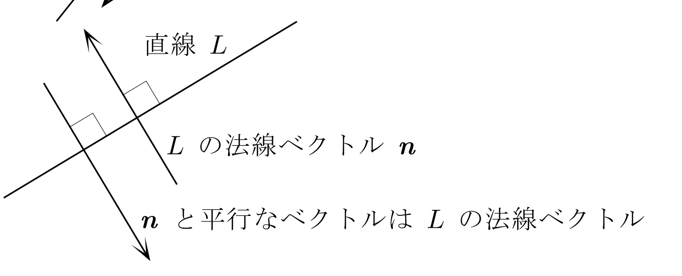
(1)　直線 L の方向ベクトルと垂直で零ベクトルでない任意のベクトルは L の法線ベクトルである；

(2)　直線 L の法線ベクトルと垂直で零ベクトルでない任意のベクトルは L の方向ベクトルである；

(3)　直線 L の法線ベクトルと平行で零ベクトルでない任意のベクトルは L の法線ベクトルである．







例題　座標平面において直線 L の方向ベクトルの一つが $(6,9)$ であるとする． L の法線ベクトルの一つを求める．

L の方向ベクトル $(6,9)$ に平行なベクトル $(2,3)$ はやはり L の方向ベクトルである．

$$(2,3)\cdot(3,-2) = 6-6 = 0 \ ,$$

よって $(3,-2) \perp (2,3)$ ． ベクトル $(3,-2)$ は，L の方向ベクトル $(2,3)$ と垂直なので，L の法線ベクトルである． 故に L の法線ベクトルの一つは $(3,-2)$ である． 終

問題 4.2.1　座標平面において直線 L の方向ベクトルの一つが $(4,-6)$ であるとします． L の法線ベクトルの一つを求めなさい．

例題　座標平面において直線 L の法線ベクトルの一つが $(6,-4)$ であるとする． L の方向ベクトルの一つを求める．

L の法線ベクトル $(6,-4)$ に平行なベクトル $(3,-2)$ はやはり L の法線ベクトルである．

$$(3,-2)\cdot(2,3) = 6-6 = 0 \ ,$$

よって $(2,3) \perp (3,-2)$ ． ベクトル $(2,3)$ は，L の法線ベクトル $(3,-2)$ と垂直なので，L の方向ベクトルである． 故に L の法線ベクトルの一つは $(2,3)$ である． 終

問題 4.2.2　座標平面において直線 L の法線ベクトルの一つが $(9,6)$ であるとします． L の方向ベクトルの一つを求めなさい．

例題　座標平面の点 $(2,-3)$ と点 $(6,7)$ とが属す直線 L の法線ベクトルを一つ求める．

L の方向ベクトルの一つは $(6,7)-(2,-3)=(4,10)$ ． 定理 3.1.1 より，ベクトル $(4,10)$ に平行なベクトルも L の方向ベクトルなので，ベクトル $(2,5)$ も L の方向ベクトルである． L の方向ベクトル $(2,5)$ に垂直なベクトルは L の法線ベクトルである．

$$(2,5)\cdot(5,-2) = 10-10 = 0 \ .$$

よって $(2,5) \perp (5,-2)$ なので L の法線ベクトルの一つは $(5,-2)$ である． 終

問題 4.2.3　座標平面の点 $(5,2)$ と点 $(-3,8)$ とが属す直線 L の法線ベクトルを一つ求めなさい．

―――― 定理の証明

定理 4.2.1　実数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする． 座標平面において，ある点 A に対して $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp (a,b)$ となる点 P の全体は，ベクトル $(b,-a)$ を方向ベクトルとする直線である．

証明　ベクトル (a,b) に対してベクトル $(b,-a)$ を考える．

$$(a,b)\cdot(b,-a) = ab+(-b)a = 0 \ ,$$

よって $(a,b) \perp (b,-a)$ ． 定理 3.6.2 より，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について，

$$\boldsymbol{v} \perp (a,b) \ \text{ならば}\ \boldsymbol{v} \mathbin{/\!/} (b,-a) \quad .$$

また，定理 3.6.2 より，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について，

$$\boldsymbol{v} \mathbin{/\!/} (b,-a) \ \text{ならば}\ \boldsymbol{v} \perp (a,b) \quad .$$

故に，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について，

$$\boldsymbol{v} \perp (a,b) \iff \boldsymbol{v} \mathbin{/\!/} (b,-a) \quad .$$

定点 A に対して，各点 P について

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp (a,b) \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} (b,-a) \quad ,$$

従って，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp (a,b)$ となる点 P の全体は，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} (b,-a)$ となる点 P の全体なので，$(b,-a)$ を方向ベクトルとする直線である． （証明終り）

定理 4.2.2　座標平面において，直線 L の任意の方向ベクトルと L の任意の法線ベクトルとは垂直である．

証明　ベクトル $\boldsymbol{n}$ が直線 L の法線ベクトルであるとする． ある点 A をとると，各点 P について

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \mathbf{0}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AA}} \perp \boldsymbol{n}$ ，よって $\mathrm{A} \in L$ ． ベクトル $\boldsymbol{k}$ が直線 L の方向ベクトルであるとする． 定理 4.1.1 より，各点 P について

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \ .$$

点 A と異なる L の点 B をとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \boldsymbol{n} \ \text{かつ}\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \ \text{かつ}\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \mathbf{0} \ .$$

定理 3.6.1 より $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{k}$ ． （証明終り）

定理 4.2.3　座標平面において，一つの直線の任意の 2 個の法線ベクトルは平行である．

証明　ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$ とが直線 L の法線ベクトルであるとする． L の方向ベクトルの一つを $\boldsymbol{k}$ とおく． 定理 4.2.2 より，$\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{k}$ かつ $\boldsymbol{n}_2 \perp \boldsymbol{k}$ ． 定理 3.6.2 より $\boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2$ ． （証明終り）

定理 4.2.4　座標平面において次のことが成り立つ：

(1)　直線 L の方向ベクトルと垂直で零ベクトルでない任意のベクトルは L の法線ベクトルである；

(2)　直線 L の法線ベクトルと垂直で零ベクトルでない任意のベクトルは L の方向ベクトルである；

(3)　直線 L の法線ベクトルと平行で零ベクトルでない任意のベクトルは L の法線ベクトルである．

証明　ベクトル $\boldsymbol{k}$ が L の方向ベクトルであるとする． ある点 A をとると，各点 P について，

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \quad .$$

零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ について，$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{v}$ ならば，定理 3.6.1 より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \ \text{ならば}\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{v} \ ,$$

定理 3.6.2 より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{v} \ \text{ならば}\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \ ,$$

よって，各点 P について

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{v} \quad .$$

故に $\boldsymbol{v}$ は L の法線ベクトルである．

ベクトル $\boldsymbol{n}$ が L の法線ベクトルであるとする． ある点 A をとると，各点 P について，

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \quad .$$

零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ について，$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n}$ ならば，定理 3.6.2 より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \ \text{ならば}\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{v} \ ,$$

定理 3.6.1 より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{v} \ \text{ならば}\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \ ,$$

よって，各点 P について

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{v} \quad .$$

故に $\boldsymbol{v}$ は L の方向ベクトルである．

ベクトル $\boldsymbol{n}$ が L の法線ベクトルであるとする． ある点 A をとると，各点 P について，

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \quad .$$

零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ について，$\boldsymbol{v} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}$ ならば，定理 3.6.1 より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{v} \quad ,$$

よって，各点 P について

$$\mathrm{P} \in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{v} \quad .$$

故に $\boldsymbol{v}$ は L の法線ベクトルである． （証明終り）