§4.11　3次元座標空間における平面と点との間の距離

定義　座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，点 A と直線 L との間の距離とは，直線 L に属す点の中で最も点 A に近い点 P と点 A との間の距離である．

次の定理の証明は前節の定理の証明と同様なので省略します．

定理　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において点 A は直線 L に属さないとする．点 A から直線 L に下ろした垂線の足を H とおくとき，点 A と直線 L との間の距離は線分 AH の長さ $\overline{\mathrm{AH}}$ である．

次の定理の証明は前節の定理 4.9 の証明と同様です．

定理 4.11　$a, b, c, d, x_0, y_0, z_0$ は定数で $a \neq 0$ または $b \neq 0$ または $c \neq 0$ とする．xyz 座標空間において方程式 $ax+by+cz+d=0$ が表す平面と点 (x_0, y_0, z_0) との間の距離は $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ である．

証明　方程式 $ax+by+cz+d=0$ が表す平面を Π とおく．

点 (x_0, y_0, z_0) が平面 L に属すとき，$ax_0+by_0+cz_0+d=0$ なので $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$，点 (x_0, y_0, z_0) と平面 Π との間の距離も 0 である．

点 $\mathrm{P}_0=(x_0, y_0, z_0)$ が平面 Π に属さないとする．点 P_0 から平面 Π に下ろした垂線の足を $\mathrm{H}=(p, q, r)$ とおく．平面 Π と点 P_0 との間の距離は $\overline{\mathrm{HP}_0}$ である．定理 4.6.7 より方程式 $ax+by+cz+d=0$ が表す平面 Π の法線ベクトル (a, b, c) と直線 HP_0 の方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HP}_0}$ とは平行なので，定理 3.5.1 より，

$$\left|(a,b,c)\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}_0}\right| = |(a,b,c)|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}_0}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\overline{\mathrm{HP}_0}\ .$$

$\mathrm{P}_0=(x_0, y_0, z_0)$ 及び $\mathrm{H}=(p, q, r)$ より $\overrightarrow{\mathrm{HP}_0}=(x_0, y_0, z_0)-(p, q, r)$ なので，

$$\begin{aligned}(a,b,c)\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}_0} &= (a,b,c)\cdot\{(x_0, y_0, z_0)-(p, q, r)\}\\ &= (a,b,c)\cdot(x_0, y_0, z_0)-(a,b,c)\cdot(p, q, r)\\ &= ax_0+by_0+cz_0-(ap+bq+cr)\ .\end{aligned}$$

点 $\mathrm{H}=(p, q, r)$ は方程式 $ax+by+cz+d=0$ が表す平面 Π に属すので，$ap+bq+cr+d=0$，よって $ap+bq+cr=-d$ なので，

$$ax_0+by_0+cz_0-(ap+bq+cr) = ax_0+by_0+cz_0-(-d) = ax_0+by_0+cz_0+d\ .$$

よって

$$(a,b,c)\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}_0} = ax_0+by_0+cz_0+d\ .$$

$\left|(a,b,c)\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}_0}\right|=\sqrt{a^2+b^2+b^2}\,\overline{\mathrm{HP}_0}$ より $|ax_0+by_0+cz_0+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\overline{\mathrm{HP}_0}$ なので，$\overline{\mathrm{HP}_0}=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ．（証明終り）

例題　xyz 座標空間において方程式 $4x+3y-2x=9$ が表す平面と点 $(7,-5,6)$ との間の距離を求める．

方程式 $4x+3y-2x=9$ つまり $4x+3y-2x-9=0$ が表す平面と点 $(7,-5,6)$ との間の距離は

$$\frac{|4\cdot 7+3\cdot(-5)-2\cdot 6-9|}{\sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{29}}\ .$$

問題 4.11.1　xyz 座標空間において方程式 $5x-4y+3z=2$ が表す平面と点 $(8,7,-6)$ との間の距離を求めなさい．