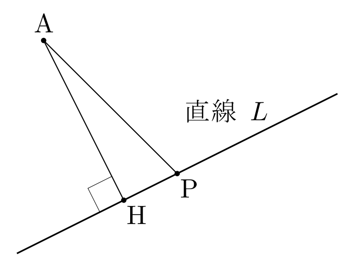
§4.10 座標平面における直線と点との間の距離

定義　座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，点 A と直線 L との間の距離とは，直線 L に属す点の中で最も点 A に近い点 P と点 A との間の距離である．

定理　座標平面 $\mathbf{R}^2$ において点 A は直線 L に属さないとする． 点 A から直線 L に下ろした垂線の足を H とおくとき，点 A と直線 L との間の距離は線分 AH の長さ $\overline{\mathrm{AH}}$ である．

証明　点 A から直線 L に下ろした垂線の足を H とおく． 直線 L に属す点 P に対して， $\overline{\mathrm{PH}}^2 \geq 0$ なので

$$\overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{PH}}^2 \geq \overline{\mathrm{AH}}^2 \ ,$$



$\mathrm{P} \neq \mathrm{H}$ のとき，三角形 AHP は $\angle\mathrm{AHP}$ が直角である直角三角形なので，ピタゴラスの定理より $\overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{PH}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2$ ． $\mathrm{P} = \mathrm{H}$ のときも $\overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{PH}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2$ ． よって

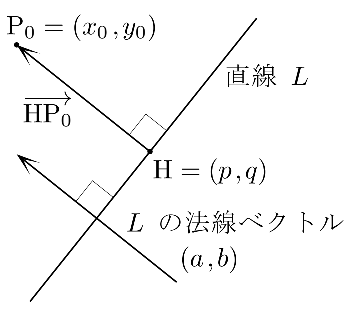
$$\overline{\mathrm{AP}}^2 \geq \overline{\mathrm{AH}}^2 \ ,$$

$\overline{\mathrm{AP}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{AP}} \geq \overline{\mathrm{AH}}$ ． このように，直線 L に属す各点 P について $\overline{\mathrm{AP}} \geq \overline{\mathrm{AH}}$ ． 従って直線 L に属す点の中で最も点 A に近い点は H である． 故に点 A と直線 L と間の距離は線分 AH の長さ $\overline{\mathrm{AH}}$ である．　（証明終り）

定理 4.10　a, b, c, x_0, y_0 は定数で $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする． xy 座標平面において方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線と点 (x_0, y_0) との間の距離は $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である．

証明　方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線を L とおく．

点 (x_0, y_0) が直線 L に属すとき， $ax_0 + by_0 + c = 0$ なので $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ ，点 (x_0, y_0) と直線 L との間の距離も 0 である．



点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ が直線 L に属さないとする． 点 P_0 から直線 L に下ろした垂線の足を $\mathrm{H} = (p, q)$ とおく． 直線 L と点 P_0 との間の距離は $\overline{\mathrm{HP}_0}$ である． 定理 4.4 より方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線 L の法線ベクトル (a, b) と直線 HP_0 の方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HP}_0}$ とは平行なので，定理 3.5.1 より，

$$\left|(a, b) \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}_0}\right| = |(a, b)| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{HP}_0}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}\,\overline{\mathrm{HP}_0} \ .$$

$\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ 及び $\mathrm{H} = (p, q)$ より $\overrightarrow{\mathrm{HP}_0} = (x_0, y_0) - (p, q)$ なので，

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}_0} &= (a, b) \cdot \{(x_0, y_0) - (p, q)\} = (a, b) \cdot (x_0, y_0) - (a, b) \cdot (p, q) \\ &= ax_0 + by_0 - (ap + bq) \ .\end{aligned}$$

点 $\mathrm{H} = (p, q)$ は方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線 L に属すので， $ap + bq + c = 0$ ，よって $ap + bq = -c$ なので，

$$ax_0 + by_0 - (ap + bq) = ax_0 + by_0 - (-c) = ax_0 + by_0 + c \ ,$$

よって

$$(a, b) \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}_0} = ax_0 + by_0 + c \ .$$

$\left|(a, b) \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}_0}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}\,\overline{\mathrm{HP}_0}$ より $|ax_0 + by_0 + c| = \sqrt{a^2 + b^2}\,\overline{\mathrm{HP}_0}$ なので， $\overline{\mathrm{HP}_0} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ．　（証明終り）

例題　xy 座標平面において方程式 $5x - 3y = 4$ が表す平面と点 $(6, 7)$ との間の距離を求める．

方程式 $5x - 3y = 4$ つまり $5x - 3y - 4 = 0$ が表す平面と点 $(6, 7)$ との間の距離は

$$\frac{|5 \cdot 6 - 3 \cdot 7 - 4|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \ .$$

問題 4.10.1　xy 座標平面において方程式 $4x - 5y = 7$ が表す平面と点 $(2, 3)$ との間の距離を求めなさい．

各実数 a, b について， $b \geq 0$ のとき，

$$|a| = b \iff a = \pm b \ .$$

例題　変数 s について次の条件をなるべく簡単な方程式で表す： xy 座標平面において方程式 $2x - 3y = 7$ が表す直線と点 $(s, -4)$ との間の距離が 6 である．

方程式 $2x - 3y - 7 = 0$ が表す直線と点 $(s, -4)$ との間の距離は

$$\frac{|2s - 3(-4) - 7|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2s - 5|}{\sqrt{13}} \ .$$

これが 6 なので，

$$\begin{aligned}\frac{|2s - 5|}{\sqrt{13}} &= 6 \ , \\ |2s - 5| &= 6\sqrt{13} \ , \\ 2s - 5 &= \pm 6\sqrt{13} \ , \\ 2s &= 5 \pm 6\sqrt{13} \ , \\ s &= \frac{5}{2} \pm 3\sqrt{13} \ .\end{aligned}$$

終

各実数 a, b について，

$$|a| < b \iff -b < a < b \ ,$$
$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \ .$$

例題　変数 t について次の条件をなるべく簡単な不等式で表す： xy 座標平面において方程式 $4x - 3y = 1$ が表す直線と点 $(2, t)$ との間の距離が 4 以下である．

方程式 $4x - 3y - 1 = 0$ が表す直線と点 $(2, t)$ との間の距離は

$$\frac{|4 \cdot 2 - 3t - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|7 - 3t|}{\sqrt{25}} = \frac{|3t - 7|}{5} \ .$$

これが 4 以下なので，

$$\begin{aligned}\frac{|3t - 7|}{5} &\leq 4 \ , \\ |3s - 7| &\leq 20 \ , \\ -20 \leq 3t - 7 &\leq 20 \ , \\ -13 \leq 3t &\leq 27 \ , \\ -\frac{13}{3} \leq t &\leq 9 \ .\end{aligned}$$

終

各実数 a, b について，

$$|a| > b \iff a < -b \text{ または } a > b \ ,$$
$$|a| \geq b \iff a \leq -b \text{ または } a \geq b \ .$$

例題　変数 u について次の条件をなるべく簡単な不等式で表す： xy 座標平面において方程式 $2x + y = 7$ が表す直線と点 $(u, 4u)$ との間の距離が 6 より大きい．

方程式 $2x + y - 7 = 0$ が表す直線と点 $(u, 4u)$ との間の距離は

$$\frac{|2 \cdot u + 4u - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|6u - 7|}{\sqrt{5}} \ .$$

これが 6 より大きいので，

$$\begin{aligned}\frac{|6u - 7|}{\sqrt{5}} &> 6 \ , \\ |6u - 7| &> 6\sqrt{5} \ , \\ 6u - 7 < -6\sqrt{5} &\text{ または } 6u - 7 > 6\sqrt{5} \ , \\ 6u < 7 - 6\sqrt{5} &\text{ または } 6u > 7 + 6\sqrt{5} \ , \\ u < \frac{7}{6} - \sqrt{5} &\text{ または } u > \frac{7}{6} + \sqrt{5} \ .\end{aligned}$$

終

問題 4.10.2　変数 s について次の条件をなるべく簡単な方程式で表しなさい： xy 座標平面において方程式 $5x - 4y = 7$ が表す直線と点 $(2, s)$ との間の距離が 8 である．

問題 4.10.3　変数 t について次の条件をなるべく簡単な不等式で表しなさい： xy 座標平面において方程式 $3x - 2y = 4$ が表す直線と点 $(t, 4t)$ との間の距離が 7 より小さい．

問題 4.10.4　変数 u について次の条件をなるべく簡単な不等式で表しなさい： xy 座標平面において方程式 $3x + 4y = -15$ が表す直線と点 $(u, -2)$ との間の距離が 6 以上である．